Prof. Dr. Peter Buchholz, Dipl.-Inf. Iryna Felko SS 2013

Modellgestützte Analyse und Optimierung
Übungsblatt 4

Ausgabe: 29. April, **Abgabe:** 6. Mai

Aufgabe 4.1 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} & : 0 \leq x \leq c \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

a) Wie muss c gewählt werden, damit $f(x)$ die Dichtefunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariable X ist? Setzen Sie dann die Aufgabe mit dem ermittelten Wert für c fort.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$.

c) Zeichnen Sie den Graphen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion in ein kartesisches Koordinatensystem.

d) Berechnen Sie $P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})$, sowie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$.

Aufgabe 4.2 (3 Punkte) (Ziehen von Zufallszahlen)
Implementieren Sie in Pseudocode das Ziehen von Zufallszahlen einer dreiphasigen Coxverteilung, wobei λ_i der Rate für die Phase i entspricht. Weiterhin beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Durchlaufen der nächsten Phase jeweils 0.5.

Aufgabe 4.3 (6 Punkte) Betrachten Sie den linearen Kongruenzgenerator

$$Z_i = (a \cdot Z_{i-1} + c) \, mod \, m$$

mit $m = 1000$, $a = 21$, $c = 3$.

a) Zeigen Sie, dass der Generator volle Periodenlänge hat.

b) Initialisieren Sie den Generator mit $Z_0 = 871$ und erzeugen Sie 10 Zufallszahlen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{10}$.

c) Transformieren Sie Ihre Zufallszahlen in $[2, 4)$-gleichverteilte Zufallszahlen.

d) Berechnen Sie den Mittelwert sowie die Stichprobenvarianz Ihrer „Ziehungen“ und vergleichen Sie die Werte mit dem Erwartungswert und der Varianz einer auf $[2, 4)$-gleichverteilten Zufallsvariable.

e) Bestimmen Sie die Anzahl der „Runs“ in Ihrer Zufallzahlenfolge nach dem *Runs-Test* und vergleichen Sie sie mit dem theoretisch erwarteten Wert für lange Zufallszahlenfolgen.

f) Nutzen Sie Ihre Zufallszahlenfolge zur Realisierung von drei exponentiell verteilten Zufallszahlen mit Parameter $\lambda = 0.5$.