

Mathematik für Informatiker 2 Übungsblatt 3

Ausgabe: 18. April, **Abgabe:** 26. April, 12 Uhr, **Block A**

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer und die Gruppennummer. Die Abgabe werfen Sie bitte in den entsprechenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein. Die Bearbeitung der Bonusaufgabe ist freiwillig, d. h. die erhältlichen Punkte sind zusätzliche Bonuspunkte, die nicht zu den 100% der Punkte des jeweiligen Blocks gehören, ihnen aber gutgeschrieben werden.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der verallgemeinerten Bernoullischen Ungleichung

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k$$

mit reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Es seien $a, b > 0$ positive reelle Zahlen mit $a \leq b$. Beweisen Sie folgende Ungleichungskette:

$$a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b} \right)^2 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \leq b^2 .$$

Zeigen Sie dazu vorab die Gültigkeit von $0 \leq (a-b)^2$.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Bestimmen und erläutern Sie mit einer Rechnung, welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Ungleichungen erfüllen:

1. $x + 1 \leq 2|x| \leq x + 2$
2. $|5x + 3| - |3x - 2| \geq 5$

Beweisen Sie für $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ die folgenden Ungleichungen:

3. $|x| - |y| \leq |x - y|$
4. $||x - x'| - |y - y'|| \leq |x - y| + |x' - y'|$

Bonusaufgabe 3.4 (4 Bonuspunkte)

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Weiter seien $a, b, c, d \in K$.

1. Zeigen Sie:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

2. Es sei $\lambda \in K$. Zeigen Sie, dass $K \times K$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d) \text{ und } (a, b) \odot (c, d) := (a \cdot c + \lambda \cdot b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

genau dann ein Körper ist, wenn $\lambda \neq x^2$ für alle $x \in K$ gilt.