technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Marco Wilhelm

Sommersemester 2013

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 4

Ausgabe: 25. April, **Abgabe:** 3. Mai, 12 Uhr, **Block** A

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto Hahn Straße 20 ein.

Hinweis: Es gilt das Archimedische Axiom.

Zu je zwei reellen Zahlen $x, y > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $nx > y$.

Daraus folgt insbesondere:

Zu jeder reellen Zahl x gibt es natürliche Zahlen n und m, so dass $n > x$ und $-m < x$.

Daraus folgt dann:

$$\text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es eine natürliche Zahl } n, \text{ so dass } \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Sie dürfen benutzen, dass $5^n > 3^n > 2^n > 2^{n-1} \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dass $0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte) Supremum/Infimum

1. Ermitteln Sie mit einer Rechnung das Supremum und Infimum folgender Teilmengen der reellen Zahlen (falls sie existieren). Handelt es sich dabei sogar um das Maximum, bzw. Minimum der entsprechenden Menge?
   a) $A = \{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} \mid p, q, r \in \mathbb{N}\}$
   b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 10x + 3 < 0\right\}$
   c) $C = \left\{\frac{x-1}{x+1} \mid x \in [0, \infty)\right\}$
2. Zeigen Sie, dass $\frac{3}{2}$ das Minimum und 2 **eine** obere Schranke von $D = \left\{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ ist. (*Hinweis:* Bernoullische Ungleichung und $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was Sie ohne Beweis benutzen dürfen.)

Aufgabe 4.2 (4 Punkte) Intervallschachtelung

Seien a, b positive reelle Zahlen. Wir definieren das *arithmetische Mittel* A, das *geometrische Mittel* G und das *harmonische Mittel* H von a und b wie folgt:

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) := \sqrt{ab}, \quad H(a,b) := \frac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b}$$

Jetzt sei $0 < a < b$, $a_1 := a, b_1 := b$ und $a_{n+1} := H(a_n, b_n), b_{n+1} := A(a_n, b_n)$. Zeigen Sie

1. $\min\{a,b\} < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < \max\{a,b\}$.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < a_n < b_n$.
3. Die $I_n := [a_n, b_n]$ bilden eine Intervallschachtelung.
4. $\sqrt{ab} \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Da die I_n eine Intervallschachtelung bilden, ist das gleichbedeutend mit $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\sqrt{ab}\}$.)

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n =: c \in \mathbb{R},$$

so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert c.

Bonusaufgabe 4.4 (4 Bonuspunkte)

Sei M eine endliche Menge mit n Elementen. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene Teilmengen mit genau k Elementen gibt für $0 \leq k \leq n$.

Folgern sie daraus mit Beweis, dass die Potenzmenge von M genau 2^n Elemente enthält.

<u>Hinweis:</u> Beweisen Sie zunächst die Gleichung $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$ und $n \in \mathbb{N}$.