

Mathematik für Informatiker 2 Übungsblatt 5

Ausgabe: 2. Mai, **Abgabe:** 10. Mai, 12 Uhr, **Block A**

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein.

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

1. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon .$$

Zeigen Sie: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon .$$

2. Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gelte die Bedingung

$$\exists C > 0, l \in \mathbb{N} \forall n \geq l : |a_{n+1} - a_n| \leq C \cdot \frac{1}{n^2} .$$

Zeigen Sie die Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Begründen Sie ihre Aussagen mit einer Rechnung.

1. $a_n = \frac{4n^3 - (-1)^n n^2}{5n + 2n^3}$
2. $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ für eine Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
3. $a_n = \frac{(n^3 - 5n)^4 - n^{12}}{n^{11}}$
4. $a_n = \sqrt{n^4 + an^3 + 2n^2} - n^2$ für $a \geq 0$

Hinweis: Sie dürfen verwenden: Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \geq 0$ gegen a , so konvergiert die Folge $(\sqrt{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen \sqrt{a} .

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $1 < a_1 < 2$, die rekursiv definiert ist durch $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$.

1. Zeigen Sie: $1 < a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
3. Bestimmen Sie den Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter Angabe einer Rechnung.

Bonusaufgabe 5.4 (4 Bonuspunkte)

Geben Sie eine beschränkte divergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $|a_{n+1} - a_n| \rightarrow 0$ an. Begründen Sie ihre Wahl.

Komm zur

reality
»die kontaktmesse für informatik«

5. Juni 2013

<http://real-IT-y.de>