technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Marco Wilhelm

Sommersemester 2013

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 6

Ausgabe: 9. Mai, **Abgabe:** 17. Mai, 12 Uhr, **Block** A

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein.

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)

Prüfen Sie (mit Beweis), ob folgende Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent sind. Ist im Konvergenzfall die Konvergenz absolut? (Begründung!)

1. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
2. $a_n = \frac{1}{n^4} \sum\limits_{k=1}^{n} k$
3. $a_n = \left(\frac{2n^4+17}{3n^4+n}\right)^n$
4. $a_n = \frac{1}{5n-1}$
5. $a_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}{2^n}$
6. $a_n = \frac{n!}{n^n}$

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Es seien (a_n) und (b_n) zwei divergente Folgen. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann folgt:

1. $((a_n \cdot b_n)_n)$ ist divergent.
2. $((a_n + b_n)_n)$ ist divergent.
3. $((c \cdot a_n)_n)$ mit $c \neq 0$ ist divergent.
4. $((\max\{a_n, b_n\})_n)$ ist divergent.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Eine Folge (b_n) wächst schneller gegen unendlich als die Folge (a_n), genau dann, wenn (a_n) und (b_n) gegen ∞ bestimmt divergent sind und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n) = 2^n$ schneller als $(a_n) = n^k$ gegen unendlich für ein festes $k \in \mathbb{N}_0$ wächst.

Bonusaufgabe 6.4 (4 Bonuspunkte)

Die Bonusaufgabe ist dieses Mal mit Octave zu bearbeiten. Geben Sie daher neben Ihren Lösungen auch den Quellcode mit an, mit dem Sie die Lösungen bestimmt haben. Die Besprechung wird im Rahmen des Tutoriums stattfinden.

1. Die Summe der Quadrate der ersten zehn natürlichen Zahlen ist

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 = 385 \ .$$

   Das Quadrat der Summe der ersten zehn natürlichen Zahlen ist

$$(1 + 2 + \ldots + 10)^2 = 55^2 = 3025 \ .$$

   Somit ist die Differenz zwischen der Summe der Quadrate der ersten zehn natürlichen Zahlen und des Quadrats der Summe $3025 - 385 = 2640$. Bestimmen Sie mit Octave die Differenz zwischen der Summe der Quadrate der ersten einhundert natürlichen Zahlen und des Quadrats der Summe.

2. Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ist ein bekanntes Beispiel für eine rekursiv definierte Folge. Ihre Rekursionsvorschrift lautet

$$f_0 = 0 \ , \qquad f_1 = 1 \ , \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ .$$

   Obwohl das Auffinden eines geschlossenen Ausdrucks für eine solche Folge schwierig ist, ist es für die Fibonnaci-Folge gelungen. Die explizite Formel von Moivre-Binet lautet

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

   und liefert die n-te Fibonacci-Zahl, ohne die vorhergegangenen Fibonacci-Zahlen ermitteln zu müssen. Bestimmen Sie mit Octave die Fibonacci-Zahl f_{10} sowohl unter Verwendung der rekursiven Formel ($f_{10,rekursiv}$) als auch mit der Formel von Moivre-Binet ($f_{10,explizit}$) und geben Sie die Differenz $|f_{10,explizit} - f_{10,rekursiv}|$ an. Warum ist sie ungleich Null?