technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Marco Wilhelm

Sommersemester 2013

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 7

Ausgabe: 16. Mai, **Abgabe:** 24. Mai, 12 Uhr, **Block** A

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein.

Achtung: Dies ist das letzte Übungsblatt zu Block A.

Aufgabe 7.1 (4 Punkte) Potenzreihe

Es sei die Folge der Fibonaccizahlen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

gegeben (vgl. Blatt 6). Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ mindestens den Konvergenzradius $r = \frac{1}{2}$ hat.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte) Stetigkeit

1. Zeigen oder widerlegen Sie für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ die Aussagen:
   a) f ist stetig in $a \Rightarrow |f|$ ist stetig in a
   b) $|f|$ ist stetig in $a \Rightarrow f$ ist stetig in a
   c) $f \cdot g$ ist stetig in $a \Rightarrow f$ und g sind stetig in a
2. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   stetig bzw. unstetig ist.

   (Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für jede beliebige reelle Zahl konvergente Folgen existieren, die vollständig rational oder vollständig irrational sind.)

Aufgabe 7.3 (4 Punkte) Zwischenwertsatz

1. Gegeben sei das Polynom $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$. Zeigen Sie ohne die Nullstellen auszurechnen, dass P in $[0,1]$ eine Nullstelle besitzt, und führen Sie ausgehend von dem Intervall $[0,1]$ drei Schritte einer Intervallhalbierung durch, um eine Näherung für eine Nullstelle zu bekommen.
2. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion f nehme ihr Maximum an der Stelle $a \in (0,1)$ an. Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist.

Bonusaufgabe 7.4 (4 Bonuspunkte) Polynome

1. Dividieren Sie das Polynom $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24$ durch das Polynom $Q(x) = x^2 + x - 6$ und berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 2} \frac{P(x)}{Q(x)}$.
2. Es sei $P(x) = x^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$ ein normiertes Polynom vom Grad m, und es gelte $P(x_0) = 0$. Zeigen Sie
$$|x_0| \leq \max\{1, |a_0| + \ldots + |a_{m-1}|\}$$