

Mathematik für Informatiker 2 Übungsblatt 11

Ausgabe: 13. Juni, **Abgabe:** 21. Juni, 12 Uhr, **Block C**

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein.

Hinweis: Ist eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist sie auf $[a, b]$ auch Riemann-integrierbar.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

1. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

2. Es seien die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ sowie für $n \in \mathbb{N}$ die äquidistante Zerlegung $Z_n = (x_0, \dots, x_n)$ des Intervalls $[0, 1]$ mit $x_i = \frac{i}{n}$ für $i = 0, 1, \dots, n$ gegeben.
- Berechnen Sie die Obersumme $S(Z_n)$ sowie die Untersumme $s(Z_n)$ von f .
 - Zeigen Sie unter Ausnutzung von Aufgabenteil a), dass f Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie $\int_0^1 f(x) dx$.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und monoton wachsende Funktion und Z eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Zeigen Sie:

$$S(Z) - s(Z) \leq (f(b) - f(a)) \cdot |Z|$$

Dabei bezeichnet $|Z|$ das Feinheitsmaß der Zerlegung Z und $S(Z)$ bzw. $s(Z)$ die Ober- bzw. Untersumme von f .

Aufgabe 11.3 (4 Punkte) Eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn sie differenzierbar ist und es gilt:

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in D$$

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen für

- $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k = 0, 1, \dots, n$
- $f(x) = \frac{1}{(1+x)^n}$, $x \neq -1$ und $n \in \mathbb{N}$
- $f(x) = \sin(x) \cos(x)$

Bonusaufgabe 11.4 (4 Bonuspunkte) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie durch einen Widerspruchsbeweis:

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \implies f(x) = 0 \text{ für alle } x \in [a, b]$$