

## Mathematik für Informatiker 2 Übungsblatt 12

**Ausgabe:** 20. Juni, **Abgabe:** 28. Juni, 12 Uhr, **Block C**

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto Hahn Straße 20 ein.

### Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen alle Stammfunktionen durch eine ausführliche Rechnung mittels partieller Integration auf geeigneten Intervallen und führen Sie anschliessend eine Kontrolle mittels Differentiation durch:

1.  $f(x) = (x - 2)^2 \cos(x)$
2.  $f(x) = e^{-x} \sin(x)$
3.  $f(x) = \ln(x + 1)$
4.  $f(x) = x^2 e^{-2x}$

### Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Seien  $a < b$  und  $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbare Funktionen.

a) Zeigen Sie, dass mit  $(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx$  ein Halbskalarprodukt definiert wird, d. h. es gelten folgende Beziehungen:

1.  $(f, f) \geq 0$
2.  $(f, g) = (g, f)$
3. für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:  $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$

b) Zeigen Sie die Schwarzsche Ungleichung:  $(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g)$ .

Hinweis: Benutzen Sie die Tatsache, dass  $(f - \alpha g, f - \alpha g) \geq 0$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt. Im Laufe des Beweises sollte man  $\alpha$  geschickt wählen.

### Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem. Die Graphen der Funktion  $f(x) = 4x^3 - 4x + 5$  und der Geraden  $g$ , die parallel zur x-Achse verläuft und den Wendepunkt von  $f$  schneidet, beranden eine Fläche.

Berechnen Sie den Flächeninhalt.

**Bonusaufgabe 12.4** (4 Bonuspunkte)

- a) Zeigen Sie mit Hilfe des erweiterten Mittelwertsatzes der Integralrechnung folgende Abschätzung:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx \leq \frac{2}{3}$$

- b) Finden Sie für das Integral  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$  mit Hilfe des erweiterten Mittelwertsatzes der Integralrechnung eine geeignete untere Schranke. Begründen Sie Ihre Wahl.