

Mathematik für Informatiker 2 Übungsblatt 13

Ausgabe: 27. Juni, Abgabe: 5. Juli, 12 Uhr, Block C

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein.

Achtung: Dies ist das letzte Blatt zu Block C.

Aufgabe 13.1 (4 Punkte) Partielle Integration

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n \neq m \end{cases}$$

(Hinweis: Es gilt $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 13.2 (4 Punkte) Substitution

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale. Geben Sie auch Ihren Rechenweg an.

1. $\int_0^2 x \sqrt[3]{4-x^2} dx$

2. $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$

(Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

3. $\int_{1/2}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

4. $\int_0^1 \frac{2e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 3e^x - 3} dx$

Aufgabe 13.3 (4 Punkte) Integration symmetrischer Funktionen

Es sei $a \geq 0$ und $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

1. Ist f punktsymmetrisch zum Ursprung, d. h. gilt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-a, a]$, dann folgt:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

2. Ist f achsensymmetrisch, d. h. gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-a, a]$, dann folgt:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Bonusaufgabe 13.4 (4 Bonuspunkte) Bogenlänge

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann wird

$$L_a^b(f) := \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

die Bogenlänge des Graphen von f genannt und gibt die Länge der Kurve, die als Graph von f gegeben ist, an.

1. Bestimmen Sie die Bogenlänge $L_0^5(f)$ für die Funktion $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{3/2}$.
2. Bestimmen Sie eine Näherung an $L_0^5(f)$, indem Sie die Funktion f durch eine geeignete affine Funktion, d. h. eine Funktion der Form $x \mapsto cx + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$, approximieren. Wählen Sie selbst $c, d \in \mathbb{R}$ sinnvoll!