technische universität dortmund

Aufgabe 1: Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$. Dann gilt $\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$.
2. Für $q \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$.
3. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Aufgabe 2:

1. Bestimmen Sie für die folgenden Mengen Infimum, Supremum, Minimum und Maximum, sofern sie existieren.
   (i) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2) \cdot (x-1) > 0\}$
   (ii) $M_2 = \left\{\frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
   (iii) $M_3 = \left\{\frac{n}{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$
2. Es seien $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ zwei nichtleere Mengen. Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten.
   (i) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$
   (ii) $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}$ für $A \cap B \neq \emptyset$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie, welche der folgenden Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, absolut konvergent oder divergent sind.

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } k = 2i+1 \text{ (ungerade)} \\ 0 & \text{falls } k = 2i \text{ (gerade)} \end{cases}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{10^k}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k}{1+k^2}\right)$
4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cdot \log k}{\exp(k)}$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen. Sie können zum Nachweis der Konvergenz Ergebnisse aus der Vorlesung, wie zum Beispiel die Konvergenz der geometrischen Reihe oder der Exponentialreihe nutzen, ohne diese herzuleiten.

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 4^k \cdot x^{2k}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{3^{2k}}$