technische universität dortmund

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}+e^{-x}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-6x+4}{x^2-2x+1}$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig? Untersuchen sie die Funktionen in (2) und (3) auch auf gleichmäßige Stetigkeit.

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)\cdot(x+1)}$

2. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) = x^2$

Aufgabe 3: Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - x + 1$ gegeben.

1. Bestimmen Sie den Grenzwert von f für $x \to 0$ und die uneigentlichen Grenzwerte für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

2. Bestimmen Sie die lokalen Optima von f.

3. Analysieren Sie das Monotonieverhalten von f auf dem Definitionsbereich, indem Sie jeweils Teilintervalle bestimmen, auf denen f monoton oder streng monoton ist.

4. Zeigen Sie, dass f im Intervall $[1, 3]$ eine Nullstelle besitzt (d.h. $f(x) = 0$ für ein $x \in [1, 3]$).

5. Zeigen Sie, dass f im Intervall $[1, 3]$ genau eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4: Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{ax}{e^{x^2}}$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben.

1. Bestimmen Sie den Grenzwert von f für $x \to 0$ und die uneigentlichen Grenzwerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

2. Bestimmen Sie die Extremstellen und Wendepunkte von f.

3. Analysieren Sie das Monotonieverhalten von f auf dem Definitionsbereich, indem Sie jeweils Teilintervalle bestimmen, auf denen f monton oder streng monoton ist.