technische universität
dortmund

Aufgabe 1: Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall und $a < b$.

1. Zeigen Sie, dass es $x \in \mathbb{Q}$ gibt mit $x \in I$.
2. Zeigen Sie, dass es $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt mit $y \in I$.
3. Zeigen Sie, dass es zu jeder Zahl $r \in \mathbb{R}$ jeweils eine rationale Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ als auch eine irrationale Folge $(y_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = r$.

Aufgabe 2: Konstruieren Sie jeweils eine Folge, deren Menge der Häufungspunkte genau die Mengen

1. $\{1, 2, \dots, m\}$ für $m \in \mathbb{N}$, bzw.
2. $\mathbb{N}$ sind.

Aufgabe 3:

1. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Zahlenfolgen, die sich nur in endlich vielen Gliedern voneinander unterscheiden, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt, dass $a_n = b_n$. Zeigen Sie unter dieser Voraussetzung folgende Aussage: a_n konvergiert genau dann, wenn b_n konvergiert und im Falle der Konvergenz stimmen beide Grenzwerte überein.
2. Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $x \in X$ und $f, g : X \to Y$. Weiter gebe es eine Umgebung U von x mit $U \subseteq X$ und es gelte für alle $u \in U$, dass $f(u) = g(u)$. Zeigen Sie: Unter diesen Voraussetzungen ist f genau dann in x stetig, wenn g in x stetig ist.
3. Zeigen Sie, dass $f(x) = \max\{1, x\}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ \text{wobei } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N} \text{ und } p,\, q \text{ teilerfremd (gekürzt)} \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig und in allen Punkten $x \in \mathbb{Q}$ unstetig ist.

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to (-1, 1), x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ bijektiv ist.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die folgende Ableitungen 10-ter Ordnung: $\frac{d^{10}}{dx^{10}} \left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (x \neq 1)$.

Aufgabe 7: Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte durch ein- oder mehrfache Anwendung der Regel von l'Hospital berechnet werden können und geben Sie sie gegebenenfalls an:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{e^{x}-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-e^{-x}}{x}$

Aufgabe 8: Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x^2 + 12$. Der Graph von f und die x-Achse schließen eine Fläche ein. In diese Fläche wird ein Rechteck so gelegt, dass die Rechteckseiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte desjenigen Rechtecks, dessen Flächeninhalt maximal ist, und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

Hinweis: Der Flächeninhalt A eines Rechteckes, welches die sich diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte (a, b) und $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, ergibt sich durch $A = |a - c| \cdot |b - d|$.

Aufgabe 9: Gegeben sei die in $x \neq -1$ definierte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe um $a = 0$.
2. Wie groß ist der Konvergenzbereich dieser Taylor-Reihe?
3. Stellt die Taylor-Reihe auch die Funktion f in ihrem Konvergenzbereich dar?

Aufgabe 10: Untersuchen Sie die Funktion $2x \cdot e^{1-x}$ auf

1. Symmetrie
2. Verhalten am Rand des Definitionsbereichs
3. Nullstellen
4. Extrempunkte
5. Wendepunkte

Aufgabe 11: Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-1}{n^2}\right)$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-3n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (4 + 2(-1)^n)^n) 7^{-n}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2-n+7}{23n^2+2000n+100}}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{128^{2+n}}{n!}$

Aufgabe 12: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$$

Zeigen Sie, dass ein Punkt $x_0 \in [a, b]$ existiert mit $f(x_0) = 0$.
(Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass aus $f \leq g$ auch $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$ folgt. Hierbei sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $f \leq g \Leftrightarrow \forall\ x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$)