Prof. Dr. Peter Buchholz, Prof. Dr. Heiko Krumm, Dipl.-Inf. Iryna Felko WS 2013/2014

Modellierung und Analyse eingebetteter und verteilter Systeme

Übungsblatt 6

Ausgabe: 25. November, **Abgabe:** 12. Dezember

Hinweis: Die Besprechung findet am 13.12.13 statt.

Aufgabe 6.1 (1 Punkt) **Begriffe/Verständnisfragen** Erläutern Sie folgende Begriffe:

- absorbierende, transiente, rekurrente Zustände
- zeitdiskrete/zeitkontinuierliche Markov-Ketten
- Gedächtnislosigkeit
- stationäres Verhalten
- Zeithomogenität
- Globale Flussgleichungen

1. Welche Eigenschaften hat die Ratenmatrix (Generatormatrix) einer CTMC?
2. Welche Eigenschaften hat die Transitionsmatrix einer DTMC?
3. Was ist der Unterschied zwischen transienter und stationärer Analyse? Geben Sie Beispiele für Fragestellungen, die mit einer transienten Analyse behandelt werden können!

Aufgabe 6.2 (3 Punkte) **Markov-Ketten**
Ein elektronisches Gerät mit interner Uhr generiert zufällig die Nummern 0, 1 oder 2 bei jedem Ticken der Uhr. Dabei werden die folgenden Regeln beachtet:

- Wenn zuletzt eine 0 generiert wurde, so ist die nächste Zahl wieder eine 0 mit der Wahrscheinlichkeit $0,5$ oder eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit $0,5$.
- Wenn zuletzt eine 1 generiert wurde, so ist die nächste Zahl wieder eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit von $0,4$ oder eine 2 mit der Wahrscheinlichkeit von $0,6$.
- Wenn zuletzt eine 2 generiert wurde, so ist die nächste Zahl eine 0 mit der Wahrscheinlichkeit von $0,7$ oder eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit von $0,3$.

Bevor die Uhr anfängt zu Ticken wird eine Nummer generiert: 0 mit Wahrscheinlichkeit $0,3$, 1 mit Wahrscheinlichkeit $0,3$ und 2 mit Wahrscheinlichkeit $0,4$. Am Gerät ist eine Lampe angebracht die aufleuchtet sobald die Zahlenfrequenz $\{1, 2, 0\}$ generiert wurde. Die Uhr besitzt ein Display mit der zuletzt ausgegebenen Nummer.

a) Zeichnen Sie ein Zustandstransitionsdiagramm für diese Kette mit allen Wahrscheinlichkeiten und Transitionen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lampe nach exakt 2 Uhr-Ticks aufleuchtet.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lampe nach exakt 3 Uhr-Ticks aufleuchtet.

d) Nehmen Sie an, Sie bekommen das Gerät in die Hand während das Display die Nummer 1 anzeigt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lampe nach exakt 2 Uhr-Ticks anfängt zu leuchten? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für ein Leuchten nach 3 Uhr-Ticks?

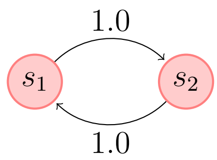
Aufgabe 6.3 (3 Punkte) **Markov-Kette für ein Defekt-Intakt-System**
Ein Glühweinautomat und ein Weihnachtspunschautomat sind hin und wieder außer Betrieb. Die Zeit zwischen zwei Ausfällen sei exponentialverteilt mit Erwartungswerten e_G bzw. e_P. Die Instandsetzungszeiten für die beiden Geräte seien ebenfalls exponentialverteilt mit Erwartungswerten e_{IG} bzw. e_{IP}.

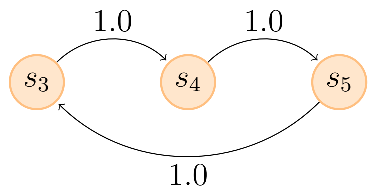
a) Stellen Sie für dieses System den Zustandsübergangsgraphen auf.

b) Ermitteln Sie für die Parameter $e_G = 20$, $e_P = 10$, $e_{IG} = 5$, $e_{IP} = 4$ die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Gerät defekt?

Aufgabe 6.4 (2 Punkte) **Oszillierendes Verhalten der Zustandswahrscheinlichkeitsverteilung**
Stellen Sie die stochastischen Matrizen für die beiden Beispiele auf, setzen Sie $\pi(0) = (1.0, 0)$





bzw. $\pi(0) = (1.0, 0, 0)$ und berechnen Sie jeweils $\pi(k + 1)$ für $k = 0, 1, 2$.

Aufgabe 6.5 (3 Punkte) **Markov-Ketten**
Benutzen Sie die Methode der Uniformisierung, um eine zeitdiskrete Markov-Kette für $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ aus der Aufgabe 5.2 abzuleiten. Ermitteln Sie die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten (falls sie existieren). Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Teil b) der Aufgabe 5.2.

Vorlesung: http://ls4-www.cs.tu-dortmund.de/cms/de/lehre/2013_ws/maevs/index.html

Übung: http://ls4-www.cs.tu-dortmund.de/cms/de/lehre/2013_ws/maevs_uebung/index.html