technische universität
dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Prof. Dr. Peter Buchholz, Dipl.-Inf. Iryna Felko

SS 2014

Modellgestützte Analyse und Optimierung
Übungsblatt 13

Ausgabe: 30. Juni, **Abgabe:** 7. Juli

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)
Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ jeweils ein Beispiel für ein lineares Programm mit

a) einem eindeutigen Optimum bei unbeschränktem zulässigen Bereich;

b) einem eindeutigen Optimum bei beschränktem zulässigen Bereich;

c) mehreren Optima;

d) keinem Optimum bei nicht leerem zulässigen Bereich.

Aufgabe 13.2 (3 Punkte)
Geben Sie notwendige und hinreichende Kriterien für s und t an, so dass das folgende lineare Programm

$$max\ x_1 + x_2 \tag{1}$$
$$u.d.N.\ sx_1 + tx_2 \leq 1 \tag{2}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3}$$

a) mindestens eine optimale Lösung hat,

b) genau eine optimale Lösung hat,

c) keine zulässige Lösung hat,

d) unbeschränkt ist.

Aufgabe 13.3 (5 Punkte)
Sei folgende Instanz des Rucksackproblems gegeben:

Gegenstand j	1	2	3	4	5	6
Wert c_j	8	8	6	10	12	12
Gewicht a_j	1	2	2	4	6	10
Relativer Wert $\frac{c_j}{a_j}$	8	4	3	2.5	2	1.2

Für das nicht überschreitbare Gesamtgewicht gilt $A = 12$. Berechnen Sie eine zulässige Lösung $\boldsymbol{x}_H$ sowie deren Zielfunktionswert F_H mittels Greedy-Heuristik.

Nehmen Sie an, dass es eine optimale Lösung $\boldsymbol{x}^*$ mit $x_1^* = 1$ und $x_6^* = 0$ gibt. Wir nummerieren die verbliebenen Gegenstände um, so dass x_j, c_j und a_j für $j = 2, ..., 5$ zu x_{j-1}, c_{j-1} und a_{j-1} werden. Dies ergibt die Daten in der unten angegebenen Tabelle mit dem maximalen Gesamtgewicht $A = 11$. Den Vektor mit den „neuen Komponenten“ $x_1, \ldots, x_4$ bezeichnen wir mit $\hat{\boldsymbol{x}}$ im Unterschied zum Vektor $\boldsymbol{x}$ mit den „alten Komponenten“ $x_1, \ldots, x_6$.

Gegenstand j	1	2	3	4
Wert c_j	8	6	10	12
Gewicht a_j	2	2	4	6
Relativer Wert $\frac{c_j}{a_j}$	4	3	2.5	2

Listen Sie die einzelnen Iterationsschritte des Branch-and-Bound-Verfahrens auf und zeigen Sie den im Laufe des Verfahrens abgearbeiteten Suchbaum. Starten Sie dabei mit der zulässigen Anfangslösung $\hat{\boldsymbol{x}}_H = (1, 1, 1, 0)^T$, die sich durch „Reduktion“ der mit der Greedy-Heuristik erhaltenen Anfangslösung $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1, 1, 0, 0)^T$ ergibt. Dabei ist die Schrankenfunktion durch $b(\boldsymbol{s}) = \sum_{j \in J(\boldsymbol{s})} c_j + Z_{LP(\boldsymbol{s})}$ gegeben, $\boldsymbol{s}$ ist ein Knoten im Suchbaum, $x_1, \ldots, x_{h(\boldsymbol{s})}$ die fixierten Variablen (und damit $h(\boldsymbol{s})$ die Tiefe von $\boldsymbol{s}$ im Suchbaum) sowie $J(\boldsymbol{s}) \subseteq \{1, ..., h(\boldsymbol{s})\}$ die Menge der Indizes der (gleich 1) gesetzten Variablen.