technische universität
dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Marco Wilhelm
Dr. Hubert Wagner
Andrej Dudenhefner, M. Sc.

Sommersemester 2014

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 4

Ausgabe: 22. April, **Abgabe:** 28. April, 12 Uhr, **Block** A

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein. Ihre Gruppennummer erfahren Sie im Assess-System.

Die Bonusaufgabe ist freiwillig zu bearbeiten, d. h. die erhältlichen Punkte sind zusätzliche Bonuspunkte, die nicht zu den 100 % der Punkte des jeweiligen Blocks gehören.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte) Minimum, Maximum, Infimum und Supremum

Bestimmen Sie rechnerisch Minimum, Maximum, Infimum und Supremum folgender Mengen, falls sie existieren:

1. $A = \{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} \in \mathbb{Q} \mid p, q, r \in \mathbb{N}\}$
2. $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 10x + 3 < 0\right\}$
3. $C = \left\{\frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R} \mid x \in [0, \infty)\right\}$

Aufgabe 4.2 (4 Punkte) Sandwich-Theorem

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Ist $b \in \mathbb{R}$ und sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b,$$

so ist auch $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte) Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ die Seitenlängen eines Rechtecks R und

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \qquad \text{(Arithmetisches Mittel)}$$

$$G(a,b) := \sqrt{ab}, \qquad \text{(Geomtrisches Mittel)}$$

$$H(a,b) := \frac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b}. \qquad \text{(Harmonisches Mittel)}$$

Zeigen Sie:

1. $a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < b$.
2. Ersetzt man a durch $H(a,b)$ und b durch $A(a,b)$, so erhält man ein Rechteck mit dem selben Flächeninhalt wie R, aber einem geringeren Umfang.

Bonusaufgabe 4.4 (4 Bonuspunkte) Intervallschachtelungsprinzip

Wiederholt man die Ersetzungen aus Aufgabe 4.3.2 rekursiv, so konstruiert man eine Folge von flächengleichen Rechtecken, deren Seitenlängen im Grenzwert gegen $G(a,b) = \sqrt{ab}$, also der Seitenlänge des flächengleichen Quadrats, streben. Diese Beobachtung soll formal mit Hilfe des Intervallschachtelungsprinzips gezeigt werden. Es seien dazu $a, b, A(a,b), G(a,b), H(a,b)$ und R definiert wie in Aufgabe 4.3. Ferner seien die Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_1 := a, a_{n+1} := H(a_n, b_n),$$
$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } b_1 := b, b_{n+1} := A(a_n, b_n)$$

gegeben. Zeigen Sie:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < a_n < b_n$.
2. Die Intervalle $I_n := [a_n, b_n]$ bilden eine Intervallschachtelung, d.h.:
   a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_{n+1} \subseteq I_n$.
   b) Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| \leq \varepsilon$.
3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n b_n = ab$.
4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $G(a,b) \in I_n$.