technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Marco Wilhelm
Dr. Hubert Wagner
Andrej Dudenhefner, M. Sc.

Sommersemester 2014

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 5

Ausgabe: 28. April, **Abgabe:** 05. Mai, 12 Uhr, **Block** A

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein. Ihre Gruppennummer erfahren Sie im Assess-System.

Die Bonusaufgabe ist freiwillig zu bearbeiten, d. h. die erhältlichen Punkte sind zusätzliche Bonuspunkte, die nicht zu den 100 % der Punkte des jeweiligen Blocks gehören.

Aufgabe 5.1 (4 Punkte) (Konvergenz von Folgen, Monotoniekriterium, Sandwich-Theorem)

Zeigen Sie:

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ konvergiert. Verwenden Sie hierzu das Monotoniekriteriums.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2}$ konvergiert mit Grenzwert 0.
3. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ konvergiert mit Grenzwert 0.

   Hinweis: Es gilt $\ln n \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
4. Es sei $c > 0$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{c^n}{n!}$ konvergiert mit Grenzwert 0.
5. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt[n]{n!}$ ist divergent.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte) (Rechenregeln für Folgen, Cauchy-Folgen)

1. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Begründen Sie ihre Aussagen mit einer Rechnung.

   a) $a_n = \frac{3n^2-n}{5+(-1)^n\cdot 2n^2}$.

   b) $a_n = \sqrt{n^5+2n} - \sqrt{n^5}$.
2. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

   $$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n > n_0 : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon\ .$$

   a) Zeigen Sie das *Cauchy-Konvergenzkriterium*:

   $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn gilt:

   $$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon\ .$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Konvergenzkriteriums, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2+a_n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

konvergiert. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte) (Reißverschlussprinzip)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien reelle Folgen, die beide gegen den Grenzwert c konvergieren.

Beweisen Sie:

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_{2n+1} = a_n$ und $c_{2n} = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert ebenfalls gegen c.

Bonusaufgabe 5.4 (4 Bonuspunkte)

Geben Sie eine beschränkte divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|a_{n+1} - a_n| \to 0$ an. Begründen Sie ihre Wahl.