technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Marco Wilhelm
Dr. Hubert Wagner
Andrej Dudenhefner, M. Sc.
Florian Kurpicz, M. Sc.

Sommersemester 2014

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 6

Ausgabe: 05. Mai, **Abgabe:** 12. Mai, 12 Uhr, **Block** A

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein. Ihre Gruppennummer erfahren Sie im Assess-System.

Die Bonusaufgabe ist freiwillig zu bearbeiten, d. h. die erhältlichen Punkte sind zusätzliche Bonuspunkte, die nicht zu den 100 % der Punkte des jeweiligen Blocks gehören.

Aufgabe 6.1 (4 Punkte) Konvergenz von Reihen

1. Prüfen Sie (mit Beweis), ob die folgenden Reihen konvergent sind. Begründen Sie im Konvergenzfall, ob die Konvergenz absolut ist.

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

   b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n+k)} \right) \right)$

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

   d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \frac{1}{n+1}}$

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} \right) \cdot x^k \right)$

   b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(2^{k^2} \cdot x^k \right)$

Aufgabe 6.2 (4 Punkte) Rechnen mit Folgen

Es seien (a_n) und (b_n) zwei divergente Folgen. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann folgt:

1. $((a_n \cdot b_n)_n)$ ist divergent.
2. $((a_n + b_n)_n)$ ist divergent.
3. $((c \cdot a_n)_n)$ mit $c \neq 0$ ist divergent.
4. $((\max\{a_n, b_n\})_n)$ ist divergent.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte) Konvergenz und absolute Konvergenz

1. Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_n a_n)$ absolut konvergiert.
2. Gilt die Aussage auch, wenn die Reihe nur konvergiert aber nicht absolut konvergiert? Beweisen Sie dies oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

Bonusaufgabe 6.4 (4 Bonuspunkte) Minorantenkriterium

Beweisen Sie Satz 3.31 (Minorantenkriterium): Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine divergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k \geq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.