technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Marco Wilhelm
Dr. Hubert Wagner
Andrej Dudenhefner, M. Sc.

Sommersemester 2014

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 7

Ausgabe: 12. Mai, **Abgabe:** 19. Mai, 12 Uhr, **Block** A

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein.

Achtung: Dies ist das letzte Übungsblatt zu Block A.

Aufgabe 7.1 (4 Punkte) Konvergenz von Reihen

Zeigen Sie folgende Aussage:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n > 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte) Stetigkeit

1. Zeigen oder widerlegen Sie für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ die Aussagen:
   a) f ist stetig in $a \Rightarrow |f|$ ist stetig in a
   b) $|f|$ ist stetig in $a \Rightarrow f$ ist stetig in a
   c) $f \cdot g$ ist stetig in $a \Rightarrow f$ und g sind stetig in a
2. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   stetig bzw. unstetig ist.

   (Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für jede beliebige reelle Zahl x konvergente Folgen mit Grenzwert x existieren, die vollständig rational oder vollständig irrational sind.)

Aufgabe 7.3 (4 Punkte) Zwischenwertsatz

1. Gegeben sei das Polynom $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$. Zeigen Sie ohne die Nullstellen auszurechnen, dass P in $[0, 1]$ eine Nullstelle besitzt, und führen Sie ausgehend von dem Intervall $[0, 1]$ drei Schritte einer Intervallhalbierung durch, um eine Näherung für eine Nullstelle zu bekommen.

   Achtung: Benutzen Sie bei der Intervallhalbierung keine Taschenrechner, Smartphones etc. oder Zahlen in Dezimaldarstellung. Bitte verwenden Sie ausschließlich Zahlen in Bruchdarstellung.

2. Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion f nehme ihr Maximum an der Stelle $a \in (0, 1)$ an. Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist.

Bonusaufgabe 7.4 (4 Bonuspunkte) Potenzreihen

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} (x+1)^k$ ist eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt -1. Ermitteln Sie mit Beweis den Konvergenzradius dieser Potenzreihe.

2. Zeigen Sie für geeignete $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} (x+1)^k$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt diese Gleichung? Begründen Sie Ihre Antwort!