technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Marco Wilhelm
Dr. Hubert Wagner
Andrej Dudenhefner, M. Sc.
Florian Kurpicz, M. Sc.

Sommersemester 2014

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 8

Ausgabe: 19. Mai, **Abgabe:** 26. Mai, 12 Uhr, **Block** B

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto Hahn Straße 20 ein.

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, welche sind surjektiv und welche sind bijektiv?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x + 1$
2. $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, g(x) = p \cdot q$ mit $x = \frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$
3. $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, h(x) = x^2$
4. $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i(x) = 2 \cdot x + |x|$

Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder durch ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Ableitungen unter Angabe der benutzten Regeln bzw. Sätze der Vorlesung.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^3 + 1) \cdot e^{x^2}$
2. $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, g(x) = \log_a(x)$, $a > 1$ konstant.
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x \cdot |x|$
4. $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), x \neq 0 \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$.

1. Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f in $\mathbb{R}$ stetig ist.
2. Zeigen oder widerlegen Sie, dass f im Intervall $[-1, 1]$ gleichmäßig stetig ist.
3. Zeigen oder widerlegen Sie, dass f in $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Bonusaufgabe 8.4 (4 Bonuspunkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ einen Fixpunkt hat, d. h. es existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.