technische universität
dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Marco Wilhelm
Dr. Hubert Wagner
Andrej Dudenhefner, M. Sc.
Florian Kurpicz, M. Sc.

Sommersemester 2014

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 11

Ausgabe: 9. Juni, **Abgabe:** 16. Juni, 12 Uhr, **Block** C

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

1. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

2. Es seien die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ sowie für $n \in \mathbb{N}$ die äquidistante Zerlegung $Z_n = (x_0, \dots, x_n)$ des Intervalls $[0,1]$ mit $x_i = \frac{i}{n}$ für $i = 0, 1, \dots, n$ gegeben.
   a) Berechnen Sie die Obersumme $S(Z_n)$ sowie die Untersumme $s(Z_n)$ von f.
   b) Zeigen Sie unter Ausnutzung von Aufgabenteil a), dass f Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte) Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn sie differenzierbar ist und es gilt:

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in D$$

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen für

1. $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \;, \quad a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k = 0, 1, \dots, n$
2. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^n} \;, \quad x \neq -1$ und $n \in \mathbb{N}$
3. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

1. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und monoton wachsende Funktion und Z eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Zeigen Sie:
$$S(Z) - s(Z) \leq (f(b) - f(a)) \cdot |Z|$$
Dabei bezeichnet $|Z|$ das Feinheitsmaß der Zerlegung Z und $S(Z)$ bzw. $s(Z)$ die Ober- bzw. Untersumme von f.

2. Bestimmen Sie mithilfe der (Riemannschen) Zwischensumme den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Bonusaufgabe 11.4 (4 Bonuspunkte) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie durch einen Widerspruchsbeweis:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longrightarrow f(x) = 0 \text{ für alle } x \in [a,b]$$