Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Ingo Schulz
Dipl.-Math. Marco Wilhelm
Dr. Hubert Wagner
Andrej Dudenhefner, M. Sc.
Florian Kurpicz, M. Sc.

Sommersemester 2014

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 13

Ausgabe: 23. Juni, **Abgabe:** 30. Juni, 12 Uhr, **Block** C

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Namen, Matrikelnummer und Gruppe auf. Die Abgabe werfen Sie bitte in den passenden Briefkasten (auf Gruppennummer achten!) in der Otto-Hahn-Straße 20 ein.

Achtung: Dies ist das letzte Blatt zu Block C.

Aufgabe 13.1 (4 Punkte) Partielle Integration

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n \neq m \end{cases}$$

(Hinweis: Es gilt $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 13.2 (4 Punkte) Substitution

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale. Geben Sie auch Ihren Rechenweg an.

1. $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{4-x^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

   (Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$)
3. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3e^x-3}\,dx$

Aufgabe 13.3 (4 Punkte) Integration symmetrischer Funktionen

Es sei $a \geq 0$ und $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

1. Ist f punktsymmetrisch zum Ursprung, d. h. gilt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-a, a]$, dann folgt:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

2. Ist f achsensymmetrisch, d. h. gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-a, a]$, dann folgt:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Bonusaufgabe 13.4 (4 Bonuspunkte) Bogenlänge

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann wird

$$L_a^b(f) := \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

die Bogenlänge des Graphen von f genannt und gibt die Länge der Kurve, die als Graph von f gegeben ist, an.

1. Bestimmen Sie die Bogenlänge $L_0^5(f)$ für die Funktion $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{3/2}$.
2. Bestimmen Sie eine Näherung an $L_0^5(f)$, indem Sie die Funktion f durch eine geeignete affin-lineare Funktion, d. h. eine Funktion der Form $x \mapsto cx + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$, approximieren. Wählen Sie selbst $c, d \in \mathbb{R}$ sinnvoll!