# Stetigkeit und Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

## 1 Stetigkeit

Wir übertragen den Stetigkeitsbegriff auf mehrstellige reellwertige Funktionen.

**Definition 1.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.
Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in M$ gdw. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Diese Definition ist gleichwertig zu der folgenden Aussage

- Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in M$ gdw. es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle $x \in M$ mit $\|x - a\| < \delta$ gilt
$$\|f(x) - f(a)\| \varepsilon.$$

$f : M \to \mathbb{R}$ heißt stetig gdw. sie in allen Punkten $a \in M$ stetig ist.

Für die Limesbildung im Falle von $n$-stelligen Funktionen gelten dieselben Regeln, die wir auch schon für die einstelligen Funktionen erhalten haben:

**Theorem 2** (Eigenschaften von Grenzwerten)**.** Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Abbildungen und es gelte

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M.$$

Dann gilt:

1. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. $\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot L$ für $c \in R$
3. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
4. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ , falls $M \neq 0$
5. $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = L^n$ für eine positive ganze Zahl

**Theorem 3** (Rechenregeln für stetige Funktionen)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ und $f, g : M \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $c \cdot f$, $f + g$ und $f \cdot g$ stetig.
Die Funktion $\frac{f}{g}$ ist in allen Punkten $a \in M$ stetig, in denen $g(a) \neq 0$ gilt.

Mit dem folgenden Satz wollen wir ein weiteres Hilfsmittel zum Nachweis der Stetigkeit einer Funktion liefern. Zur einfacheren Formulierung werden als Definitions- und Wertebereich keine echten Teilmengen der zugrunde liegenden Bereiche betrachtet.

**Theorem 4** (Stetigkeit von Kompositionen)**.** Die Funktionen $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ und $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$, seien stetig. Dann ist auch die Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := f(g_1(x), \ldots, g_k(x))$$

stetig.

**Beispiel 5.** Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \sin(|x - y^2|)$$

ist stetig.

Die Funktionen $p_1, \mathrm{pot2}, \mathrm{minus} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $p_1(x, y) := x$, $\mathrm{pot2}(x, y) := y^2$ und $\mathrm{minus}(x, y) := x - y$ sind stetig (wird hier vorausgesetzt).
Da die Betragsfunktion abs und die Sinusfunktion stetig sind, ist also auch die folgende Komposition von Funktionen stetig:

$$\sin(\mathrm{abs}(\mathrm{minus}(p_1(x, y), \mathrm{pot2}(x, y)))) = \sin(|\mathrm{minus}(p_1(x, y), \mathrm{pot2}(x, y))|) = \sin(|x - y^2|).$$

**Beispiel 6.**

1. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist in allen Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig, da sie Quotient zweier stetiger Funktionen ist. Für den Nachweis der Stetigkeit im Punkt $(0, 0)$ zeigen wir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Wir verwenden die Polarkoordinatendarstellung:

Es sei $r$ der Abstand des Punktes $(x, y)$ vom Ursprung. Es ist dann $x^2+y^2 = r^2$, $x = r \sin\theta$ und $y = r \cos\theta$. Für $(x, y) \to (0, 0)$ konvergiert $r \to 0$. Über den Winkel $\theta$ kann keine Festlegung gemacht werden, so dass für $\theta$ immer alle Möglichkeiten in Betracht gezogen werden müssen. Verwenden wir die Polarkkordinatendarstellung für die Substitution, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \cos^2\theta \cdot r^2 \sin^2\theta}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r^2 \cos^2\theta \ \sin^2\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da der Limes für $r \to 0$ und für alle $\theta$ existiert und immer denselben Wert 0 liefert, existiert daher auch $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ und es gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

2. Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ebenfalls in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ stetig, da sie Quotient zweier stetiger Funktionen ist. Im Punkt $(0,0)$ ist sie aber nicht stetig. Dies lässt sich z.B. dadurch zeigen, dass man zwei Punktfolgen betrachtet, die beide gegen $(0,0)$ konvergieren, für die aber die zugehörigen Funktionswerte unterschiedliche Grenzwerte besitzen.

Wir wollen hier dies ebenfalls mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung zeigen.

Mittels Polarkoordinatendarstellung geht $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ über in $\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$. Damit gilt $\lim\limits_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} \cos^2\theta = \cos^2\theta$.

Würde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ existieren, so müsste also für alle $\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \cos^2\theta$$

gelten, was nicht möglich ist.

3. Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ebenfalls in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ stetig, da sie Quotient zweier stetiger Funktionen ist. Die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} && \text{(Substitution von } t \text{ für } x^2+y^2\text{)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{1} && \text{(L'Hospital'sche Regel)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 7** (Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$)**.**

1. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\,y}{x^6 - y^3} & \text{für } y \neq x^2 \\ 0 & \text{für } y = x^2 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist.

2. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^2\cdot y)}{y} & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

## 2 Partielle Ableitung

**Definition 8.** Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$. Existiert der Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{h}$$

so heißt $f$ an der Stelle $x$ partiell nach $x_i$ ableitbar. Der Grenzwert wird notiert als $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ bzw. als $f_{x_i}(x)$ bzw. als $\mathcal{D}_i\ f(x)$.
Existieren sämtliche partiellen Ableitungen (1. Ordnung) $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ für $1 \leq i \leq n$, dann wird der Vektor $\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$ als Gradient von $f(x)$ bezeichnet und mit $\nabla f(x)$ bzw. grad $f(x)$ notiert.

**Definition 9.** Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$. Ferner sei angenommen

- alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung existieren und sind stetig,
- alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung $f_{x_i x_j}(x) := \frac{\partial f_{x_i}(x)}{\partial x_j}$ für $1 \leq i, j \leq n$ existieren.

Dann heißt die Matrix

$$\left(f_{x_i x_j}(x)\right)_{i,j}$$

Hesse-Matrix von $f$, notiert als $\nabla^2 f(x)$.

Man beachte, dass die Hesse-Matrix immer symmetrisch ist.

**Definition 10.** Eine $n \times n$-Matrix $A$ heißt positiv-definit, falls für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $x^T \cdot A \cdot x > 0$ und negativ-definit, falls $(-A)$ positiv-definit ist.

**Theorem 11.** Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$.

1. Hat $f$ in $a$ ein lokales Extremum, dann gilt $\nabla f(a) = \mathbf{0}$ (Nullvektor).
2. Es gelte $\nabla f(a) = \mathbf{0}$ und alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung existieren und seien stetig.
   (a) Falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $x^T \cdot \nabla^2 f(a) \cdot x > 0$, d.h. wenn $\nabla^2 f(a)$ positiv-definit ist, dann ist in $a$ ein lokales Minimum.
   (b) Falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $x^T \cdot \nabla^2 f(a) \cdot x < 0$, d.h. wenn $\nabla^2 f(a)$ negativ-definit ist, dann ist in $a$ ein lokales Maximum.
   (c) Gibt es $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $x^T \cdot \nabla^2 f(a) \cdot x > 0$ und $y^T \cdot \nabla^2 f(a) \cdot y < 0$, so liegt kein Extremum vor.

Es gilt:

**Theorem 12.** Eine (Hesse-) Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ist positiv-definit genau dann, wenn für alle Determinanten $\Delta_k$, $1 \leq k \leq n$, mit

$$\Delta_k := \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

gilt $\Delta_k > 0$.

**Beispiel 13.**
Ist $\begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{xy}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix}$ die Hesse-Matrix einer zweistelligen Funktion $f$, so ist diese also positiv-definit, wenn

$$\Delta_1 = \left| f_{xx}(a) \right| = f_{xx}(a) > 0$$

und

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{xy}(a) & f_{yy}(a) \end{vmatrix} = f_{xx}(a)\, f_{yy}(a) - (f_{xy}(a))^2 > 0.$$

Sie ist negativ definit, wenn $\Delta_1 < 0$ und $\Delta_2 > 0$ ist.

**Aufgabe 14.**

1. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $f(x, y, z) = x \cdot \sin(2\,x + y\,z) + z$.

2. Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) \;=\; x^2 + 2\,y^2 - \frac{1}{2}\,\ln(x^2 \cdot y^2).$$

   Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f$. Geben Sie für jeden dieser kritischen Punkte an, ob $f$ dort ein Extremum besitzt und wenn ja, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt.

   Bestimmen Sie das Randverhalten von $f$ für $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$.

**Aufgabe 15.**

1. Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y, z) = z\,\cos(x + y) - e^{x\,y} + \frac{1}{x\,z}\quad.$$

2. Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) \;=\; x^4 + 3\,y^3 - x^2 - y.$$

   Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f$. Geben Sie für jeden dieser kritischen Punkte an, ob $f$ dort ein Extremum besitzt und wenn ja, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt.