Integrationstechniken

Im Folgenden werden zentrale Techniken zur Bestimmung von unbestimmten und bestimmten Integralen behandelt.

1 Substitutionsmethode

Substitutionsregel:

Unbestimmtes Integral: Ist $u = g(x)$ eine auf einem Intervall I definierte differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung g', und ist die Funktion f auf dem Wertebereich von g stetig, so gilt

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Bestimmtes Integral: Ist $u = g(x)$ eine auf einem Intervall $[a, b]$ definierte differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung g', und ist die Funktion f auf dem Wertebereich von g stetig, so gilt

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Die Substitutionsmethode liefert daher folgende Vorgehensweise zur Berechnung eines unbestimmten Integrals $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$:

- Substituiere u für $g(x)$ und $\mathrm{d}u$ für $g'(x)\mathrm{d}x$.

  Wir erhalten $\int f(u)\,\mathrm{d}u$.
- Integriere bezüglich u.
- Ersetze im Ergebnis u durch $g(x)$.

Aufgabe 1 (Substitutionsmethode)**.**
Berechnen Sie

$$\int x^2 \sin(x^3 + 4)\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2 (Substitutionsmethode – mehrfache Substitutionen)**.**
Berechnen Sie

$$\int \sqrt{1 + \sin^2(x-1)}\,\sin(x-1)\cos(x-1)\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3 (Substitutionsmethode für bestimmtes Integral)**.**
Berechnen Sie

$$\int_0^\pi 5(5 - 4\cos(t))^{\frac{1}{4}}\sin(t)\mathrm{d}t.$$

2 Partielle Integration

Diese korrespondiert der Produktregel in der Differentiation.

Partielle Integration: Seien $f, g : [a, b] \to R$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4 (Partielle Integration)**.**
Berechnen Sie

1. $\int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^4 xe^{-x}\mathrm{d}x$

3 Methode der Partialbruchzerlegung

Voraussetzung: Es liegt eine echt gebrochen rationale Funktion vor, d.h. eine Funktion, die sich als Quotient von zwei Polynomen darstellen lässt, wobei der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist. Wir stellen die Methode direkt mittels zweier Aufgaben vor.

Aufgabe 5. Berechnen Sie mithilfe der Partialbruchzerlegung die Integrale:

1. $\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\mathrm{d}x.$