Kombinatorik

1 Prinzip des doppelten Abzählens

Theorem 1. Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation über endlichen Mengen A und BB. Für $x \in A$ bezeichne $a(x)$ die Anzahl der mit x in Relation stehenden $y \in B$ und $b(y)$ die mit y in Relation stehenden $x \in A$. Dann gilt

$$\sum_{x \in A} a(x) = \sum_{y \in B} b(y).$$

Diese Relation R können wir über ihre „Inzidenzmatrix“ I_R repräsentieren::

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad I_R(x, y) = 1.$$

Der Satz besagt dann, dass die Summe der Zeilensummen gleich der Summe der Spaltensumen (gleich der Anzahl aller Einsen in der Inzidenzmatrix) ist.

Aufgabe 2.

1. Auf einer Landkarte sind n Orte untereinander verbunden. Eine Straße verbindet je zwei Orte. Die Anzahl der Straßen, die Start- bzw. Endpunkt eines bestimmten Ortes o sind, bezeichnen wir mit $s(o)$. Die Anzahl aller Orte sei O. Bestimmen Sie die Anzahl S aller Straßen der Karte.

2. Zwölf Studierende der Informatik nehmen an einem Fachprojekt teil. Nach jeder Sitzung werden 3 Studierende beauftragt, die verwendete Spezialhardware ordnungsgemäß zu verstauen. Am Ende des Semesters stellt sich heraus, dass jedes mögliche Paar von Studierenden genau einmal gemeinsam Aufräumdienst hatte. Wieviele Sitzungen hatte das Fachprojekt?

2 Schubfachprinzip

Theorem 3 (Schubfachprinzip)**.** A und B seien endliche Mengen mit $|A| > |B| > 0$ und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann gibt es ein $y \in B$ mit $|f^{-1}(y)| > 1$.

Informell: Teilt man m Objekte in n Kategorien („Schubfächer“) ein und ist $m > n$, dann gibt es (mindestens) eine Kategorie, die mindestens zwei Objekte enthält.

Zwei einfache Beispiele.

Beispiel 4.

- Unter je 13 Personen gibt es mindestens zwei, die im selben Monat Geburtstag haben.
- In der Sockenkiste von Professor Ordentlich befinden sich 10 graue, 10 blaue und 10 braune Socken. Der Professor nimmt – in Gedanken versunken – eine Reihe von Socken heraus. Wie viele Socken muss er herausnehmen, um garantiert 2 gleichfarbige Socken zu haben? Wie viele, um 2 blaue Socken zu erhalten?

Theorem 5 (Verallgemeinerter Schubfachschluss)**.** A und B seien nichtleere endliche Mengen mit $|A| > |B|$ und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann gibt es ein $y \in B$ mit $|f^{-1}(y)| \geq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$.

Einfaches Beispiel:

Beispiel 6. Von 100 Personen feiern mindestens 9 Personen im gleichen Monat ihren Geburtstag.

Aufgabe 7.

1. In einer Kiste sind 3 rote, 6 grüne und 5 blaue Kugeln. Wie oft muss man blind ziehen, so dass man sicher

   b_1) 2 Kugeln,

   b_2) 3 Kugeln,

   b_3) 5 Kugeln

   gleicher Farbe hat?

2. Gegeben sei eine Folge $(a_1, \ldots, a_{n^2+1})$ ganzer Zahlen. Zeigen Sie:

   Es existiert eine monoton wachsende oder monoton fallende Teilfolge der Länge $n+1$.

   Z.B. gibt es in $(5, 7, 4, 6, 5)$ die monoton fallende Folge $(7, 6, 5)$.

   Hinweis: Betrachten Sie zu einem Element a der Folge den Wert $p(a)$, der die Länge einer längsten, monoton wachsenden Teilfolge von $(a_1, \ldots, a_{n^2+1})$ angibt, die in a beginnt.