Kombinatorik

1 Auswahl von k aus n Elementen

Zur Veranschaulichung legen wir das Urnenmodell zugrunde:

- Gegeben ist eine Urne mit n Objekten.
- Wir ziehen aus der Urne k Objekte

Wir unterscheiden 4 Fälle:

- Objekt wird
  - zurück gelegt
  - nicht zurück gelegt
- die Reihenfolge, in der die Objekte gezogen werden, ist
  - von Bedeutung
  - nicht von Bedeutung

Fall Ziehen mit Zurücklegen, mit Reihenfolge:

Es gibt n^k viele Möglichkeiten.

Beispiel 1. Beim Toto muss das Ergebnis von 11 Fußball-Paarungen (Sieg, Niederlage oder Unentschieden) getippt werden.

Urnenmodell:

- Urne: 3 mögliche Ergebnisse
- das i-te Ziehen entspricht dem getippten Ergebnis der i-ten Paarung

Folglich gibt es $3^{11} = 177147$ viele mögliche Möglichkeiten, den Tippschein auszufüllen.

Ziehen mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge:

Es gibt $\frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot \ldots \cdot k} = \binom{n+k-1}{k}$ viele Möglichkeiten.

Beispiel 2. Eine Konditorei bietet 14 verschiedene Kuchensorten an. Für die Kaffeetafel zu Hause möchte Herr Meier 6 Stück Kuchen kaufen. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es für Herrn Meier, Kuchen mit nach Hause zu nehmen.

Urnenmodell:

- Urne: 14 Kuchensorten
- das i-te Ziehen entspricht dem Kauf des i-ten Stück Kuchens. Auf die Reihenfolge, in der die einzelnen Kuchenstücke ausgewählt werden, kommt es nicht an.

Es gibt $\binom{14+6-1}{6} = 27132$ viele Wahlmöglichkeiten.

Ziehen ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge:

Es gibt $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ viele Möglichkeiten.

Beispiel 3. In einem Sportwettkampf nehmen 10 Sportler teil. 3 Medaillen sind zu vergeben. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Siegerehrung gibt es?

Urnenmodell:

- Urne: 10 Sportler
- das dreimalige Ziehen ohne Zurücklegen entspricht der Bestimmung des Siegers, des Zweit- und des Drittplatzierten.

Es gibt $\frac{10!}{7!} = 720$ viele mögliche Resultate.

Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge:

Es gibt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ viele Möglichkeiten.

Beispiel 4. Ziehung der Lottozahlen 6 aus 49:

Urnenmodell:

- Urne: 49 Kugeln mit den Lottozahlen
- Es werden 6 Kugeln gezogen. Auf die Reihenfolge, in der die einzelnen Kugeln ausgewählt werden, kommt es nicht an.

Es gibt

$$\binom{49}{6} = 13.983.816$$

viele verschiedene Möglichkeiten, 6 Zahlen zu ziehen.

Aufgabe 5.

1. Ein englischer Buchmacher hat ein neues Tippspiel eingeführt: Man muss vorhersagen, bei welchen der 10 Spielpaarungen eines Spieltages der 1. englischen Fußballliga ein Heimsieg, ein Auswärtssieg oder ein Unentschieden herauskommen wird **und** in welchen 4 der 10 Spielpaarungen es am meisten gelbe Karten geben wird. Wieviele mögliche Tipps gibt es? Die Angabe eines arithmetischen Ausdruckes reicht. Sie brauchen das Ergebnis nicht als Zahl auszurechnen!

2. Eine Lottogesellschaft führt ein neues Lotteriespiel ein. Für einen Tipp müssen in einem Zahlenfeld mit Ziffern 0 bis 9 drei Ziffern angekreuzt werden. Zusätzlich muss eine Folge von vier Buchstaben aus dem Alphabet (A-Z) angegeben werden, wobei Buchstaben mehrfach vorkommen dürfen. Wie viele verschiedene Tipps sind möglich? Sie brauchen die Zahl nicht auszurechnen. Die Angabe eines arithmetischen Ausdrucks ist ausreichend.

3. Wegen der ansteigenden Kosten zur Ausstrahlung der Ziehung der Lottozahlen sollen nicht mehr 6 sondern nur noch 4 aus 49 Zahlen gezogen werden. Dafür muss aber auch die richtige Reihenfolge der gezogenen Zahlen vorhergesagt werden. Wieviele mögliche Tipps gibt es? Sind es mehr oder weniger Tipps als beim herkömmlichen Lottospiel 6 aus 49? Rechnerische Begründung!

2 Das Prinzip der Inklusion und Exklusion

Es gilt:

1. Für endliche Mengen A und B:

$$\begin{aligned} |A \cup B| = |A| + |B| && \text{(Ebene 1)} \\ - |A \cap B| && \text{(Ebene 2)} \end{aligned}$$

   Ein Element x, das sowohl in A als auch in B ist, wird durch $|A| + |B|$ zweimal gezählt und muss daher noch einmal abgezogen werden.

2. Für endliche Mengen A, B und C:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| && \text{(Ebene 1)} \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| && \text{(Ebene 2)} \\ &+ |A \cap B \cap C| && \text{(Ebene 3)} \end{aligned}$$

   Ein Element, das in A, B und C vorkommt, wird in Ebene 1 3 mal gezählt, in Ebene 2 3 mal abgezogen und in Ebene 3 1 dazu gezählt, also insgesamt einmal gezählt.

3. Für endliche Mengen A, B, C und D:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| && \text{(Ebene 1)} \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| && \text{(Ebene 2)} \\ &+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| && \text{(Ebene 3)} \\ &- |A \cap B \cap C \cap D| && \text{(Ebene 4)} \end{aligned}$$

   Ein Element x, das in allen vier Mengen vorkommt, wird in Ebene 1 viermal gezählt, in Ebene 2 6 mal abgezogen, in Ebene 3 4 mal dazu gezält und in Ebene 4 1 mal abgezogen, also insgesamt 4-6+4-1=1 mal gezählt.

Allgemein erhalten wir die folgende **Siebformel**:

Theorem 6. Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{j \in I} A_j \right|$$

Beispiel 7. Bestimmen Sie die Anzahl der durch 2 oder 3 oder 5 teilbaren natürlichen Zahlen ≤ 60.

Es bezeichne $A_i := \{n \in \{1, \ldots, 60\} \mid i \text{ teilt } n\}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} |A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= |A_2| + |A_3| + |A_5| \\ &- |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| \\ &+ |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \end{aligned}$$

Hierbei ist

- $|A_2| = 30$
- $|A_3| = 20$
- $|A_5| = 12$
- $|A_6| = |A_2 \cap A_3| = 10$
- $|A_{10}| = |A_2 \cap A_5| = 6$
- $|A_{15}| = |A_3 \cap A_5| = 4$
- $|A_{30}| = |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 2$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= 30 + 20 + 12 \\ &\quad - 10 - 6 - 4 \\ &\quad + 2 \\ &= 44 \end{aligned}$$

Damit ist also 44 die gesuchte Anzahl.

Aufgabe 8. Wieviele 5-stellige Zahlen (ohne führende Nullen!) gibt es, die an der ersten, zweiten oder dritten Stelle eine ungerade Ziffer haben? Verwenden Sie das **Inklusions-/Exklusionsprinzip!**

Hinweis: Sie brauchen die Zahl am Ende nicht auszurechnen. Die Angabe des begründeten arithmetischen Ausdrucks ist ausreichend.