1 Konvergenz von Reihen

1.1 Das Quotientenkriterium

Satz 3.33 (Quotientenkriterium)
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq n_0$. Es gebe eine reelle Zahl $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, so dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$ für alle $k \geq n_0$, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Bemerkung:
Existiert der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ und gilt dann $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, so sind die Voraussetzungen des Satzes 3.33 erfüllt und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.
Darüber hinaus gilt folgendes:
Existiert der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ und ist $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Tip:
Das Quotientenkriterium ist oft in solchen Fällen nützlich, in denen das Folgenelement a_n Exponentialterme wie c^n für eine Zahl c oder Fakultätsterme wie $n!$ enthält.

Aufgabe 1 (Quotientenkriterium)**.**

1. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{2^{3k-1}}{(2k-3)!}$ konvergiert.

2. Wir betrachten eine absolut konvergente Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, für die ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq n_0$ gilt: $a_k \neq 0$ und $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q < 1$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage gilt:

   Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} a_k$ konvergiert absolut.

1.2 Das Wurzelkriterium

Satz 3.32 (Wurzelkriterium)
Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq q < 1$, so dass $|a_k| < c \cdot q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Bemerkung:
Existiert der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und gilt dann $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so sind die Voraussetzungen des Satzes 3.32 erfüllt und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.
Existiert der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Tip:
Das Wurzelkriterium ist oft in solchen Fällen nützlich, in denen das Folgenelement a_n Exponentialterme, aber keine Fakultätsterme, enthält.

Aufgabe 2 (Wurzelkriterium).
Zeigen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen.

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{4k}\right)^k$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{k}{2^k} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2^k} & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

2 Potenzreihen

Für eine Potenzreihe P ist $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \text{ konvergiert}\}$ der Konvergenzradius von P.
Tip:
In vielen Fällen liefert das Quotientenkriterium eine geeignete Methode zur Bestimmung des Konvergenzradius der Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. Existiert $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ und gilt $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = a$, so konvergiert im Falle $a = 0$ P für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $a > 0$, so ist $r = \frac{1}{a}$ der Konvergenzradius von P.

Aufgabe 3 (Konvergenzradius).
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen. Sie können zum Nachweis der Konvergenz Ergebnisse aus der Vorlesung, wie zum Beispiel die Konvergenz der geometrischen Reihe oder der Exponentialreihe nutzen, ohne diese herzuleiten.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4^k \cdot x^{2k}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{3^{2k}}$