Das Riemannsche Integral

Es soll die von von dem Funktionsgraph einer Funktion f und der x-Achse in den Intervallgrenzen $[a, b]$ eingeschlossene Fläche F berechnet werden.

Idee: Approximiere die Funktion durch Treppenfunktionen g_n.

führt zu: Approximiere die Fläche durch Rechtecksummen.

Zur Wahl der Treppenfunktionen g_n: Zerlege Intervall in n Teilintervalle $I_1, \ldots, I_n$.

Setze für $x \in I$, $I \in \{I_1, \ldots, I_n\}$ z.B. $g_n(x) = \max_{x \in I} f(x)$.

Hier am Beispiel des Integrals $\int_0^1 x^2 \, dx$.

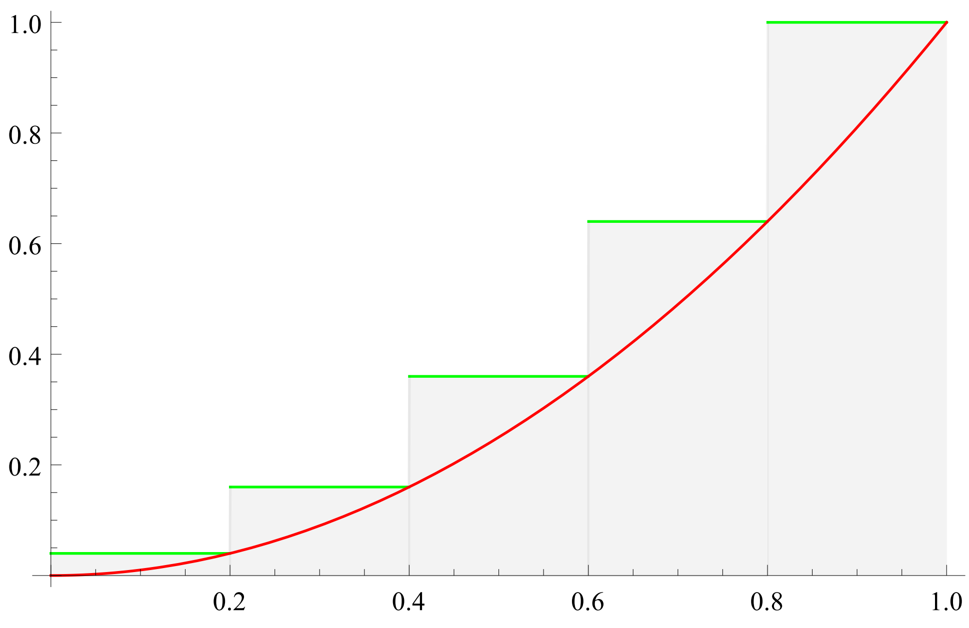
Wir betrachten äquidistante Zerlegungen Z_n des Integrationsintervalls in n Teilintervalle.

$n = 5:$ Die Breite eines Teilintervall ist jeweils $\frac{1}{5}$.

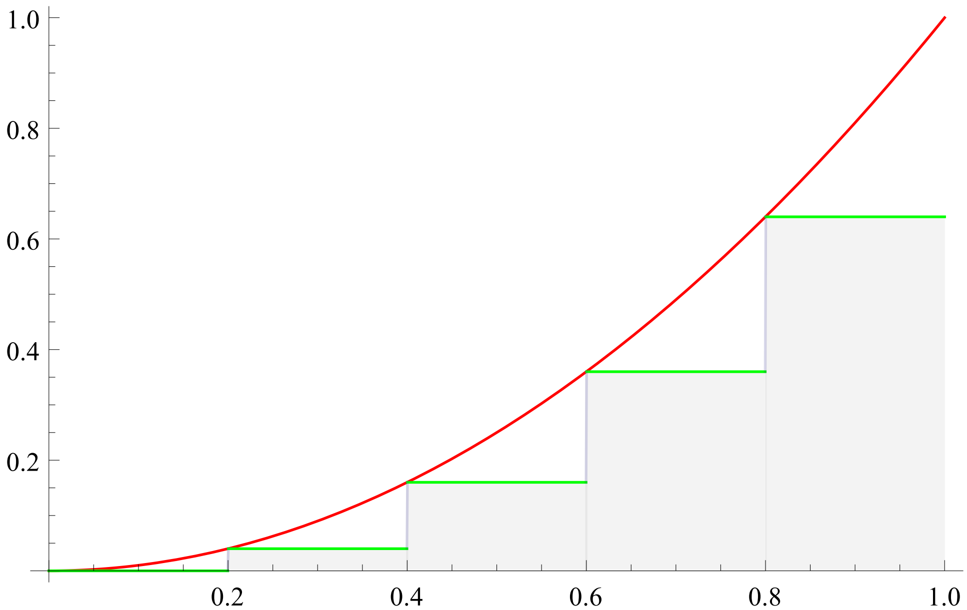
Maximaler Funktionswert im Intervall $[\frac{i-1}{5}, \frac{i}{5}]$: $\quad (\frac{i}{5})^2$.

Minimaler Funktionswert im Intervall $[\frac{i-1}{5}, \frac{i}{5}]$: $\quad (\frac{i-1}{5})^2$.

Verwenden wir für $1 \leq i \leq 5$ den maximalen Funktionswert im Intervall $[\frac{i-1}{5}, \frac{i}{5}]$, so erhalten wir eine Treppenfunktion, die mit der x-Achse die in der folgenden Grafik grau gezeichnete Fläche einschließt. Deren als Obersumme $S(Z_5)$ bezeichneter Flächeninhalt beträgt $\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{i}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = 0.44$ und ist eine obere Schranke für F:



Verwenden wir für $1 \leq i \leq 5$ den minimalen Funktionswert im Intervall $[\frac{i-1}{5}, \frac{i}{5}]$, so schließt die resultierende Treppenfunktion mit der x-Achse die in der nächsten Grafik grau gezeichnete Fläche ein. Deren Flächeninhalt wird als Untersumme $s(Z_5)$ bezeichnet, da er eine untere Schranke für F darstellt, und beträgt $\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{i-1}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = 0.24$:

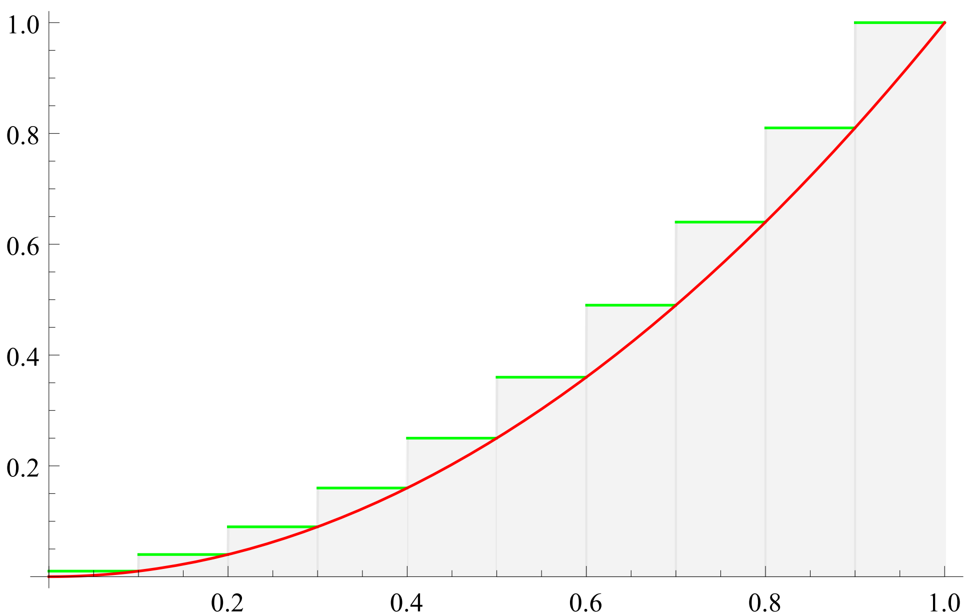


$n = 10:$ Die Breite eines Teilintervall ist jeweils $\frac{1}{10}$.

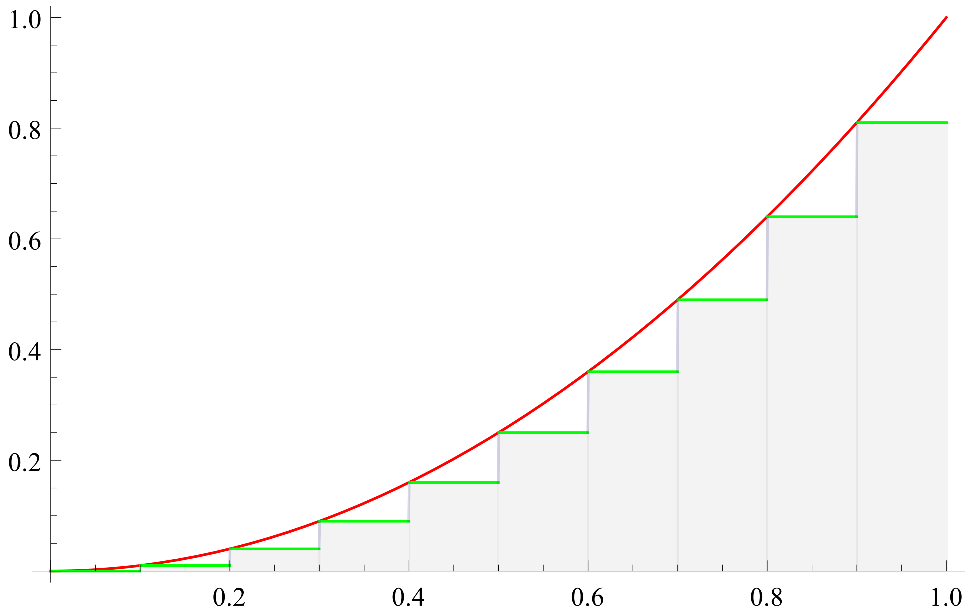
Maximaler Funktionswert im Intervall $[\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]$: $\quad (\frac{i}{10})^2$.

Minimaler Funktionswert im Intervall $[\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]$: $\quad (\frac{i-1}{10})^2$.

Wir erhalten in der folgenden Grafik als Flächeninhalt der grau gezeichneten Fläche die Obersumme $S(Z_{10}) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} = 0.385$, die im Vergleich zu $S(Z_5) = 0.44$ kleiner geworden ist:



und als Untersumme $s(Z_{10}) \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{(i-1)}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} = 0.285$ die gegenüber $s(Z_5) = 0.24$ nun größer gewordene grau gezeichnete Fläche:



Definition 1.

1. Das untere Riemann-Integral: $\underline{\int}_0^1 x^2\,dx = \sup\{s(Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [0,1]\}$
2. Das obere Riemann-Integral: $\overline{\int_0^1} x^2\,dx = \inf\{S(Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [0,1]\}$
3. Sind unteres und oberes Riemann-Integral gleich, so heißt $\int_0^1 x^2\,dx := \underline{\int}_0^1 x^2\,dx$ das Riemann-Integral von x^2 über $[0,1]$.

In der Definition des Riemann-Integrals werden alle möglichen Zerlegungen des Intervalls betrachtet. Nach Satz 8.8 des Skripts genügt es Folgen von Zerlegungen zu betrachten, in denen die Länge der Zerlegungsintervalle gegen 0 konvergiert.

Beispiel 2. Wir wollen das Integral der Funktion x^2 über dem Intervall $[0,u]$ für $u > 0$ berechnen. Wir betrachten wieder äquidistante Zerlegungen Z_n in n Intervalle $I_1, \ldots, I_n$, die alle die Länge $\frac{u}{n}$ aufweisen. Als Treppenfunktion verwenden wir für $x \in I$, $I \in \{I_1, \ldots, I_n\}$ $g_n(x) = \max_{x\in I} f(x)$.

Wir erhalten $S(Z_n) = \sum_{i=1}^n (i \cdot \frac{u}{n})^2 \cdot \frac{u}{n}$.
Damit folgt weiter

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S(Z_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{u}{n}\right)^2 \cdot \frac{u}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{u^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\
&= u^3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (1+2n)\right) \\
&= u^3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(2n^3 + 3n^2 + n\right)\right) \\
&= u^3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \\
&= \frac{1}{3} u^3.
\end{aligned}$$

Wählen wir wie im obigen Beispiel speziell $u = 1$, so erhalten wir $\int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 3 (Klausuraufgabe zur Integralrechnung)**.**

1. Bestimmen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int x\, e^{3\,x+1}\, dx$.
2. Bestimmen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3 - 2\,x}{x^2 - x}\, dx$.
3. Bestimmen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$.