technische universität
dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Jens Lechner; Andrej Dudenhefner, M. Sc.; Dr. Igor Vatolkin
Dipl.-Inf. Pascal Libuschewski; Dipl.-Inf. Denis Fisseler; Dipl.-Inf. Lars Walczak

Sommersemester 2015

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 3

Abgabefrist: 27.04.2015, 12:00 Uhr, **Block:** 1

Zur Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker II" Briefkästen im ersten Geschoss der Otto-Hahn-Straße 12 sowie im Erdgeschoss der Otto-Hahn-Straße 16 zur Verfügung. Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch den Namen der Veranstaltung, der Gruppennummer sowie Zeit und Ort der Übung gekennzeichnet.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur aufgeführten Abgabefrist ein.

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Hinweis: Es gilt das Archimedische Axiom:

Zu je zwei reellen Zahlen $x, y > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $nx > y$.

Daraus folgt insbesondere:

Zu jeder reellen Zahl x gibt es natürliche Zahlen n und m, so dass $n > x$ und $-m < x$.

Daraus folgt dann:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n, so dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Aufgabe 3.1 *Quiz* (1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $a_n = \frac{5n^2-7n}{n^2-n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen 0.
2. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Nullfolge.
3. Für alle $0 \leq a < b$ gilt $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
4. $5^n > 3^n > 2^n > 2^{n-1} \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.2 *Supremum/Infimum* (2+2 Punkte)

1. Bestimmen Sie das Supremum und Infimum folgender Teilmenge der reellen Zahlen (falls sie existieren). Handelt es sich dabei sogar um das Maximum, bzw. Minimum der entsprechenden Menge?
$$A = \left\{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} \;\mid\; p, q, r \in \mathbb{N}\right\}$$

2. Zeigen Sie, dass $\frac{3}{2}$ das Minimum und 2 **eine** obere Schranke von $D = \left\{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \;\mid\; n \in \mathbb{N}\right\}$ ist. (*Hinweis:* Bernoullische Ungleichung und $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was Sie ohne Beweis benutzen dürfen.)

Aufgabe 3.3 *Intervallschachtelung* (1+1+1+1 Punkte)

Seien a, b positive reelle Zahlen. Wir definieren das *arithmetische Mittel* A, das *geometrische Mittel* G und das *harmonische Mittel* H von a und b wie folgt:

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) := \sqrt{ab}, \quad H(a,b) := \frac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b}$$

Jetzt sei $0 < a < b$, $a_1 := a, b_1 := b$ und $a_{n+1} := H(a_n, b_n), b_{n+1} := A(a_n, b_n)$. Zeigen Sie

1. $H(a,b) < G(a,b)$ **oder** $G(a,b) < A(a,b)$.

   (*Hinweis:* Es gilt insgesamt $a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < b$.)

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < a_n < b_n$.

3. Die $I_n := [a_n, b_n]$ bilden eine Intervallschachtelung.

4. $\sqrt{ab} \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Da die I_n eine Intervallschachtelung bilden, ist das gleichbedeutend mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\sqrt{ab}\}$.)

Aufgabe 3.4 *Sandwich-Theorem* (4 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n =: c \in \mathbb{R},$$

so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert c.