technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Jens Lechner; Andrej Dudenhefner, M. Sc.; Dr. Igor Vatolkin
Dipl.-Inf. Pascal Libuschewski; Dipl.-Inf. Denis Fisseler; Dipl.-Inf. Lars Walczak

Sommersemester 2015

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 4

Abgabefrist: 04.05.2015, 12:00 Uhr, **Block:** 1

Zur Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker II“ Briefkästen im ersten Geschoss der Otto-Hahn-Straße 12 sowie im Erdgeschoss der Otto-Hahn-Straße 16 zur Verfügung. Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch den Namen der Veranstaltung, der Gruppennummer sowie Zeit und Ort der Übung gekennzeichnet.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur aufgeführten Abgabefrist ein.

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Aufgabe 4.1 *Quiz* (1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2}$ konvergiert gegen den Grenzwert 0.
2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$ konvergiert gegen den Grenzwert 0.

   Hinweis: Es gilt $\ln(n) \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\sin(\ln(n))}{\ln(n)}$ konvergiert gegen den Grenzwert 0.
4. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ konvergiert gegen den Grenzwert 1.

   Hinweis: Verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung (Satz 2.11).

Aufgabe 4.2 *(Konvergenz von Folgen, Rechenregeln für Folgen, Konvergenzkriterium für beschränkt konvergente Folgen, Sandwich-Theorem)* (1+1+1+1 Punkte)

1. Zeigen Sie:

   a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ konvergiert. Verwenden Sie hierzu das Konvergenzkriterium für beschränkt konvergente Folgen.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

   b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt[n]{n!}$ ist divergent.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $c \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $k! > c^k$.
2. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Begründen Sie ihre Aussagen mit einer Rechnung.

   a) $a_n = \frac{3n^2 - n}{5 + (-1)^n \cdot 2n^2}$.

b) $a_n = \sqrt{n^5 + 2n} - \sqrt{n^5}$.

Aufgabe 4.3 *(Cauchy-Folgen)* (2+2 Punkte)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n > n_0 : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon\ .$$

1. Zeigen Sie das *Cauchy-Konvergenzkriterium*:

   $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn gilt:

   $$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon\ .$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Konvergenzkriteriums, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   $$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2 + a_n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   konvergiert. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 4.4 *(Reißverschlussprinzip)* (4 Punkte)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien reelle Folgen, die beide gegen den Grenzwert c konvergieren.

Beweisen Sie:

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_{2n+1} = a_n$ und $c_{2n} = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert ebenfalls gegen c.