

Mathematik für Informatiker 2 Übungsblatt 6

Abgabefrist: 18.05.2015, 12 Uhr, **Block:** 1

Zur Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker II“ Briefkästen zur Verfügung. Für die Gruppen 1-4, 5-15, 17 und 19-29 befinden sich die Briefkästen im ersten Geschoss der Otto-Hahn-Straße 12. Für die Gruppennummern 5, 16, 18 und 30 befindet sich der Briefkasten im Erdgeschoss der Otto-Hahn-Straße 16. Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch den Namen der Veranstaltung, der Gruppennummer sowie Zeit und Ort der Übung gekennzeichnet.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur aufgeführten Abgabefrist ein.

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Hinweis: Dies ist das vorletzte Übungsblatt zu Block 1.

Hinweis: Stetigkeit wird in der Vorlesung am 12.5. besprochen.

Aufgabe 6.1 Quiz

(1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$ ist nicht stetig.
2. Die Funktion $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$ ist nicht stetig.
3. Die Funktion $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist stetig.
4. Die Funktion $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f_4(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

Aufgabe 6.2 Stetigkeit

(1+1+1+1 Punkte)

1. Zeigen Sie: die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ ist stetig.
2. Zeigen oder widerlegen Sie für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen:
 - a) f ist stetig in $a \Rightarrow |f|$ ist stetig in a
 - b) $|f|$ ist stetig in $a \Rightarrow f$ ist stetig in a
 - c) $f \cdot g$ ist stetig in $a \Rightarrow f$ und g sind stetig in a

Hinweis: $|f| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist diejenige Funktion, für die gilt $|f|(x) = |f(x)|$.

Aufgabe 6.3 *Stetigkeit*

(4 Punkte)

Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig bzw. nicht stetig ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für jede beliebige reelle Zahl k , konvergente Folgen mit Grenzwert k existieren, die vollständig rational oder vollständig irrational sind.

Aufgabe 6.4 *Zwischenwertsatz*

(2+2 Punkte)

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 4x + 1$, die für das Intervall $[0, 1]$ in Abbildung 1 dargestellt ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f in $[0, 1]$ eine Nullstelle besitzt. Führen Sie anschließend von dem Intervall $[0, 1]$ ausgehend zwei Schritte einer Intervallhalbierung durch, um eine bessere Näherung für eine Nullstelle zu bekommen.

Hinweis: Benutzen Sie bei der Intervallhalbierung ausschließlich Zahlen in Bruchdarstellung. Die Zahlen sind in der Aufgabe so gewählt, dass es sich leicht rechnen lässt.

2. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit einem Maximum an der Stelle $a \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist.

Hinweis: Schauen Sie sich Korollar 4.19 an.

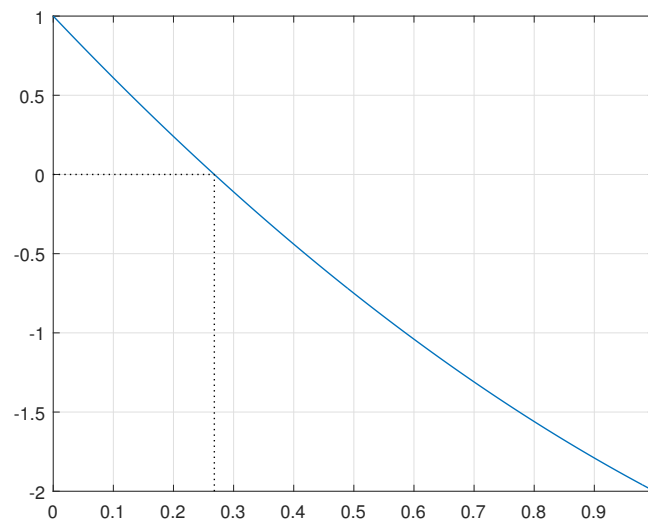


Abbildung 1: Zur Aufgabe 6.4.1: Die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 1$ mit einem Nulldurchgang bei $x = 2 - \sqrt{3}$ geplottet im Intervall $[0, 1]$.