Dipl.-Math. Jens Lechner; Andrej Dudenhefner, M. Sc.; Dr. Igor Vatolkin
Dipl.-Inf. Pascal Libuschewski; Dipl.-Inf. Denis Fisseler; Dipl.-Inf. Lars Walczak

Sommersemester 2015

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 11

Abgabefrist: 22.06.2015, 12:00 Uhr, **Block:** 2

Zur Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker II“ Briefkästen zur Verfügung. Für die Gruppen 1-4, 5-15, 17 und 19-29 befinden sich die Briefkästen im ersten Geschoss der Otto-Hahn-Straße 12. Für die Gruppennummern 5, 16, 18 und 30 befindet sich der Briefkasten im Erdgeschoss der Otto-Hahn-Straße 16. Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch den Namen der Veranstaltung, der Gruppennummer sowie Zeit und Ort der Übung gekennzeichnet.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur aufgeführten Abgabefrist ein.

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Hinweis: In Block 2 wird es insgesamt 6 Übungsblätter geben (8-13).

Aufgabe 11.1 *Quiz* (1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Nullstelle der Funktion $f : (0, e) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ lässt sich für beliebige Startwerte mit dem Newton-Verfahren approximieren.
2. Für die Taylor-Reihe $T[f, a](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ ist x der sogenannte Entwicklungspunkt.
3. Das Taylorpolynom $T_n[f, a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ für die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x)$ und $n = 1$ lautet:
$$T_1[f, a](x) = \ln(a) + \frac{1}{a}(x - a)$$
4. Das 1. Taylorpolynom $T_1[f, a](x)$ entspricht einer Tangente zur Funktion f an der Stelle a.

Aufgabe 11.2 *Optimierung* (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Seitenlängen a und b und den Umfang U desjenigen Rechtecks, das bei gegebenem Flächeninhalt $A = 25$ minimalen Umfang U hat. Stellen Sie eine geeignete Zielfunktion auf und führen Sie eine geeignete Kurvendiskussion über die Zielfunktion.

Aufgabe 11.3 *Approximative Lösung von Gleichungen* (2+2 Punkte)

Gegeben sei, wie schon in Aufgabe 6.4.1 (Zwischenwertsatz), die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Für das Intervall $[0, 1]$ ist f in Abbildung 1 dargestellt. Die Nullstelle bei $x = 2 - \sqrt{3} \approx 0,267949$ soll approximativ berechnet werden.

Hinweis: Benutzen Sie ausschließlich Zahlen in Bruchdarstellung. Die Zahlen sind in der Aufgabe so gewählt, dass es sich damit leichter rechnen lässt.

1. Führen Sie, ausgehend von dem Intervall $[0, 1]$, eine Iteration des *regula-falsi*-Verfahrens durch.
   Hinweis: Bei der gegebenen Funktion f gilt in der ersten Iteration anders als im Skript: $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Überlegen Sie sich (z.B. Anhand einer Zeichnung oder mit dem Zwischenwertsatz), welche Auswirkungen dies auf die neuen Intervallgrenzen in Schritt 2 hat. Der Schritt 1 bleibt unverändert.
2. Führen Sie, ausgehend von dem Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$, zwei Iterationen des Newton-Verfahrens durch.

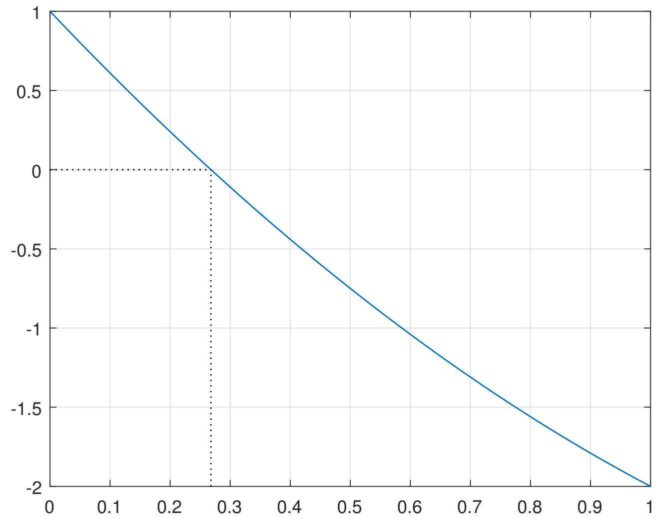

Abbildung 1: Zur Aufgabe 11.3: Die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 1$ geplottet im Intervall $[0, 1]$.

Aufgabe 11.4 *Riemann-Integrale* (1+2+1 Punkte)

1. Zeigen Sie zunächst für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$$

2. Es seien die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ sowie für $n \in \mathbb{N}$ die äquidistante Zerlegung $Z_n = (x_0, \ldots, x_n)$ des Intervalls $[0, 1]$ mit $x_i = \frac{i}{n}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ gegeben.
   a) Berechnen Sie unter Ausnutzung von Aufgabenteil 1.) die Obersumme $S(Z_n)$ sowie die Untersumme $s(Z_n)$ von f.
   b) Zeigen Sie unter Ausnutzung von Aufgabenteil a) und Satz 8.8, dass f Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)\, dx$.