technische universität dortmund

Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 4

Dipl.-Math. Jens Lechner; Andrej Dudenhefner, M. Sc.; Dr. Igor Vatolkin
Dipl.-Inf. Pascal Libuschewski; Dipl.-Inf. Denis Fisseler; Dipl.-Inf. Lars Walczak

Sommersemester 2015

Mathematik für Informatiker 2
Übungsblatt 13

Abgabefrist: 06.07.2015, 12:00 Uhr, **Block:** 2

Hinweis: Dies ist das letzte Übungsblatt zu Block 2.

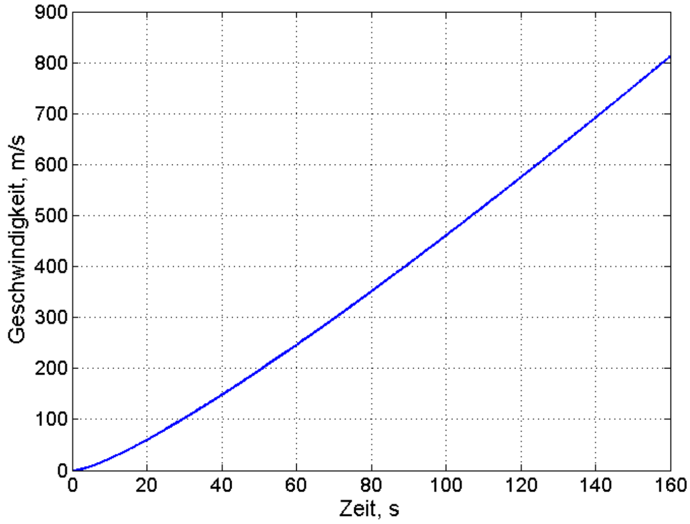
Aufgabe 13.1 *Quiz* (1+1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ sind alle Stammfunktionen durch $F(x) = -\frac{1}{4}\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) + c, c \in \mathbb{R}$ beschrieben.
2. Für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f, g \in R[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b)$ gilt: $\int\limits_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\, dx = \frac{\int\limits_a^b f(x)\, dx}{\int\limits_a^b g(x)\, dx}$.
3. Die geschlossene Fläche zwischen den Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ||x| - 5| - 2$ und $g(x) = 0$ (vgl. Graph der Funktion aus Aufgabe 10.1.2) kann als Summe der Flächen von drei Dreiecken mithilfe der folgenden Formel berechnet werden: $\int\limits_{-7}^{-3} f(x)\, dx + \int\limits_{-3}^{3} f(x)\, dx + \int\limits_{3}^{7} f(x)\, dx$.
4. Das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$ konvergiert.

Aufgabe 13.2 *Anwendung der Integration I (Rekonstruktion) und Taylorpolynom* (2+2 Punkte)

Die Geschwindigkeit einer Rakete beim senkrechten Abheben sei durch die Funktion $v : (0, 160] \to \mathbb{R}, v(x) = x\ln(x)$ gegeben (vgl. Abbildung, Zeiteinheit ist s und Geschwindigkeit m/s).



1. Rekonstruieren Sie die Höhe der Rakete nach den ersten 2,5 Minuten.

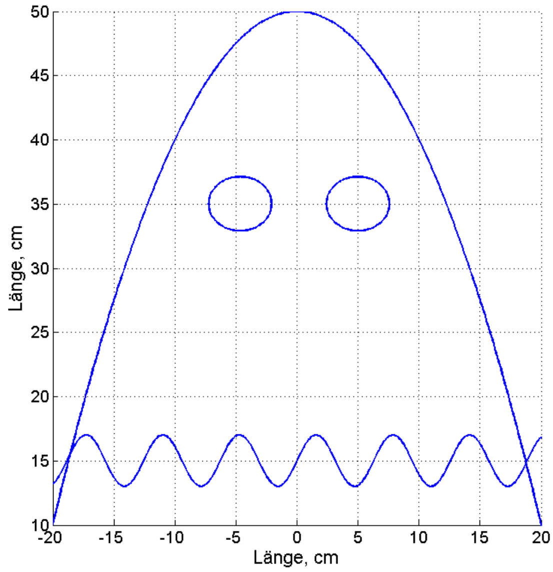
   Hinweis: Als Approximation für die Berechnung können Sie e^5 s $\approx 148,42$ s $\approx 2,5$ Minuten verwenden.

2. Berechnen Sie eine Approximation von $v(x)$ mit dem Taylorpolynom zweiter Ordnung im Entwicklungspunkt e^4. Um wie viel km verändert sich die rekonstruierte Höhe, wenn man diese Approximation als Grundlage nimmt?

   Hinweis: Für die Berechnung der Faktoren in dem quadratischen Taylorpolynom dürfen Sie den Taschenrechner verwenden.

Aufgabe 13.3 *Anwendung der Integration II (Flächenberechnung) und Newtonverfahren* (2+2 Punkte)

Für die Walpurgisnacht haben sich die Hexen was überlegt: alle Einwohner in Deutschland sollen eine Gespenstmaske bekommen. Diese wird aus Papier hergestellt, wobei der obere Bogen durch die Funktion $f(x) = 50 - 0,1x^2$ und der untere Teil durch $g(x) = 15 + 2\sin(x)$ beschrieben werden (mit Zentimetern als Maßeinheit). Für die Augen werden zwei Kreise mit dem Durchmesser von 5 cm ausgeschnitten (vgl. Abbildung). Die Herstellung der Masken geht blitzschnell mit einem Zauberspruch. Ob jedoch das Transportieren der für die Masken benötigten Papiermenge noch rechtzeitig klappt, ist noch unklar, da die Besen nicht beliebig viel tragen können...



1. Um die gesamte Papierfläche aller Masken zu berechnen, bestimmen Sie zunächst mit jeweils zwei Schritten von Newtonverfahren die Approximation beider Schnittpunkte $f(x) = g(x)$. Als Startwerte nehmen Sie $a_0 = -15$ und $b_0 = 15$.

   Hinweis: Für die Berechnung von a_1, a_2, b_1, b_2 verwenden Sie einen Taschenrechner und stellen die Berechnung der trigonometrischen Funktionen auf Radiane ein. Verwenden Sie maximal zwei Nachkommastellen.

2. Jede von 100 Hexen schafft am Abend vor Walpurgisnacht, höchstens 2 Tonnen Masken zu transportieren. Für die Masken wird das Papier der Schwere 100 g pro Quadratmeter verwendet. Angenommen, es werden 80 Millionen Einwohner beliefert. Berechnen Sie mithilfe von Integralrechnung unter Berücksichtigung der approximierten Schnittpunkten aus der ersten Teilaufgabe, ob die Gesamtfläche der Masken nicht zu groß wird, um das Vorhaben zu erledigen.

   Hinweis: Zur Vereinfachung nehmen Sie an, dass die approximierten Nullstellen „richtig” sind, also dass zwischen den beiden gilt: $|f(x) - g(x)| \approx f(x) - g(x)$.

Aufgabe 13.4 *Symmetrische Funktionen und uneigentliches Integral* (2+2 Punkte)

Es sei $a \geq 0$ und $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

1. Ist f punktsymmetrisch zum Ursprung, d. h. gilt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-a, a]$, dann folgt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

2. Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty xe^{-x}\, dx$.
