MafI 2 - Übungsblatt 14

Abgabefrist: keine Abgabe, **Block:** -

Aufgabe 14.1 *Stetigkeit im* $\mathbb{R}^2$ (0 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit im jeweiligen Definitionsbereich:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \sin(x)\cdot\sin(\frac{1}{y}) & \text{falls } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{falls } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$

   Lösung: Definitionsbereich: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y \neq 0\}$.
   f ist stetig in $D \setminus (0,0)$, da sie eine Komposition stetiger Funktionen ist.
   Für beliebige Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$ gilt:
   $$0 \leq |f(x_n,y_n)| = |\sin(x_n)| \cdot |\sin(\frac{1}{y_n})| \leq |\sin(x_n)| \cdot 1 \to 0$$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \cos(x)\cdot\sin(\frac{1}{y}) & \text{falls } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{falls } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$

   Lösung: Definitionsbereich: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y \neq 0\}$.
   f ist unstetig in $(0,0)$, da für $n \in \mathbb{N}$ gilt:
   $$f(0, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\cdot\pi}) = \cos(0)\cdot\sin(\frac{\pi}{2} + n\cdot\pi) = 1\cdot(-1)^n \not\to 0$$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{falls } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$

   Lösung: Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}^2$. f ist unstetig in $(0,0)$, da für $n \in \mathbb{N}$ gilt:
   $$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4n^2}} = \frac{\frac{3}{4n^2}}{\frac{5}{4n^2}} = \frac{3}{5} \not\to 0$$

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-x\cdot y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{falls } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$

   Lösung: Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}^2$. f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$, da sie außerhalb von $(0,0)$ eine Komposition stetiger Funktionen ist und für beliebige Folgen $(x_n), (y_n)$ mit $x_n \to 0$ bzw. $y_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt:
   $$0 \leq |f(x_n,y_n)| = \left|x_n \cdot \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}\right| = |x_n| \cdot \left|\frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}\right| \leq |x_n| \cdot 1 \to 0$$

Aufgabe 14.2 *Differenzierbarkeit im* $\mathbb{R}^2$ (0 Punkte)

Berechnen Sie alle lokalen Extrema folgender Funktionen, falls vorhanden:

1. $f(x,y) = x^3 - xe^y$

   Lösung: $f(x,y) = x^3 - xe^y$

   $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - e^y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -xe^y \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - e^y & -xe^y \end{pmatrix}$

   Wegen der partiellen Ableitung nach y muss für einen kritischen Punkt $x = 0$ gelten.
   Für $x = 0$ ist die partiellen Ableitung nach x ungleich 0. Es gibt somit keinen kritischen Punkt.

2. $f(x,y) = 3x^3 - 36x + xy^2$

   Lösung: $f(x,y) = 3x^3 - 36x + xy^2$

   $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 9x^2 - 36 + y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$

   $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 18x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$

   Für kritische Punkte folgt aus $2xy = 0$, dass $x = 0$ oder $y = 0$ gilt.

   - **Fall** $x = 0$ **:** Aus $9 \cdot 0^2 - 36 + y^2 = 0$ folgt $y = \pm 6$.
     - **Fall** $y = 6$ **:** $\nabla^2 f(0,6) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$ und damit
       $(1,1) \cdot \nabla^2 f(0,6) \cdot (1,1)^T = 24 > 0$ und $(-1,1) \cdot \nabla^2 f(0,6) \cdot (-1,1)^T = -24 < 0$.
       Folglich liegt in $(0,6)$ kein Extremum vor.
     - **Fall** $y = -6$ **:** $(1,1) \cdot \nabla^2 f(0,-6) \cdot (1,1)^T = -24 < 0$ und
       $(-1,1) \cdot \nabla^2 f(0,-6) \cdot (-1,1)^T = 24 > 0$.
       Folglich liegt in $(0,-6)$ kein Extremum vor.
   - **Fall** $y = 0$ **:** Aus $9x^2 - 36 + 0^2 = 0$ folgt $x = \pm 2$.
     - **Fall** $x = 2$ **:** $\nabla^2 f(2,0) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ und damit

       $\forall (x',y')^T \neq (0,0)^T : (x',y') \cdot \nabla^2 f(2,0) \cdot (x',y')^T = 36x'^2 + 4y'^2 > 0.$

       Folglich liegt in $(2,0)$ ein lokales Minimum vor.
     - **Fall** $x = -2$ **:** $\nabla^2 f(-2,0) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und damit

       $\forall (x',y')^T \neq (0,0)^T : (x',y') \cdot \nabla^2 f(-2,0) \cdot (x',y')^T = -36x'^2 - 4y'^2 < 0.$

       Folglich liegt in $(-2,0)$ ein lokales Maximum vor.

Aufgabe 14.3 *Kombinatorik* (0 Punkte)

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben.

1. **Schubfachprinzip:**
   Ein Übungsblatt mit neun Aufgaben wird an sieben Studenten verteilt. Jeder Student muss mindestens vier Aufgaben des Blattes bearbeiten. Zeigen Sie, dass es mindestens eine Aufgabe gibt, die von mindestens vier Studenten bearbeitet werden muss.

   Lösung: Schubfachprinzip:

   (Analog zu Beispiel 10.3 c) Wenn jede der neun Aufgaben von drei Studenten bearbeitet worden ist, wurden insgesamt 27 Aufgaben bearbeitet. Die sieben Studenten müssen zusammen mindestens 28 Aufgaben bearbeiten. Damit bleibt mindestens ein Student übrig, der noch mindestens eine Aufgabe zu bearbeiten hat. Egal, für welche er sich entscheidet, so wird diese Aufgabe zum vierten Mal bearbeitet.

2. **Doppeltes Abzählen:**
Auf einer Karte sind Orte O dargestellt, von welchen einige durch Straßen S verbunden sind, d.h. eine Straße $s \in S$ verbindet zwei Orte $o, o' \in O$ mit $o \neq o'$. Die Funktion $a : O \to \mathbb{N}$ beschreibt die Anzahl der Straßen, die Start- bzw. Endpunkt eines Ortes sind, d.h. in Ort $o \in O$ starten bzw. enden $a(o)$ Straßen. Bestimmen Sie die Anzahl aller Straßen der Karte abhängig von a.

<u>**Lösung:**</u> Definiere die Relation $R \subseteq O \times S = \{(o, s) \mid o \text{ ist Enpunkt von } s\}$.

Die Indikatorfunktion für R ist gegeben durch $I_R(o, s) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (o, s) \in R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann gilt $a(o) = \sum\limits_{s \in S} I_R(o, s)$.

Definiere $b(s) = \sum\limits_{o \in O} I_R(o, s)$.

Eine Straße verbindet je zwei Orte, d.h. $\forall s \in S : b(s) = 2$.

Es folgt: $|S| = \frac{1}{2} \sum\limits_{s \in S} 2 = \frac{1}{2} \sum\limits_{s \in S} b(s) \overset{\text{doppeltes Abzählen}}{=} \frac{1}{2} \sum\limits_{o \in O} a(o)$

Aufgabe 14.4 *Inklusion/Exklusion* (0 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Prinzips des Inklusion/Exklusion die Anzahl der natürlichen Zahlen $n \leq 1000$ an, die nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar sind.

<u>**Lösung:**</u> Es sei $A_k := \{n \in \mathbb{N} \mid k|n \wedge n \leq 1000\}$, also bezeichne $|A_k|$ die Anzahl der durch k teilbaren natürlichen Zahlen kleiner gleich 1000. Damit gilt:

$$|A_2| = 500 \qquad |A_3| = 333 \qquad |A_5| = 200$$

$$|A_2 \cap A_3| = |A_6| = 166 \qquad |A_2 \cap A_5| = |A_{10}| = 100 \qquad |A_3 \cap A_5| = |A_{15}| = 66$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = |A_{30}| = 33$$

Nach dem Prinzip der Inklusion/Exklusion folgt für die gesuchte Anzahl:

$$1000 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 1000 - (|A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|)$$

$$= 1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33 = 266$$