

Modellierung und Analyse eingebetteter und verteilter Systeme

Übungsblatt 6

Ausgabe: 13. November, **Abgabe:** 20. November

Hinweis: Die Besprechung findet am 24.11 statt.

Aufgabe 6.1 (4 Punkte) Markov-Ketten: Klassifikation der Zustände

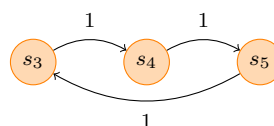
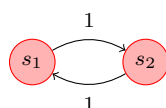
Gegeben sei folgende Transitionswahrscheinlichkeits-Matrix P

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

- Ermitteln Sie die transienten und die rekurrenten Zustände.
- Ist P eine irreduzible oder eine reduzible Markov-Kette? Ist sie periodisch oder aperiodisch?
- Finden Sie alle geschlossenen irreduziblen Mengen der Kette.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte) Oszillierendes Verhalten der Zustandswahrscheinlichkeiten

Stellen Sie die stochastischen Matrizen für die beiden Beispiele auf, setzen Sie $\pi(0) = (1.0, 0)$ bzw. $\pi(0) = (1.0, 0, 0)$ und berechnen Sie jeweils $\pi(k+1)$ für $k = 0, 1, 2$.



Aufgabe 6.3 (6 Punkte) Markov-Ketten

Ein elektronisches Gerät mit interner Uhr generiert zufällig die Nummern 0, 1 oder 2 bei jedem Ticken der Uhr. Dabei werden die folgenden Regeln beachtet:

- Wenn zuletzt eine 0 generiert wurde, so ist die nächste Zahl wieder eine 0 mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 oder eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0,5.

- Wenn zuletzt eine 1 generiert wurde, so ist die nächste Zahl wieder eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit von 0,4 oder eine 2 mit der Wahrscheinlichkeit von 0,6.
- Wenn zuletzt eine 2 generiert wurde, so ist die nächste Zahl eine 0 mit der Wahrscheinlichkeit von 0,7 oder eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit von 0,3.

Bevor die Uhr anfängt zu Ticken wird eine Nummer generiert: 0 mit Wahrscheinlichkeit 0,3, 1 mit Wahrscheinlichkeit 0,3 und 2 mit Wahrscheinlichkeit 0,4. Am Gerät ist eine Lampe angebracht die aufleuchtet sobald die Zahlenfrequenz $\{1, 2, 0\}$ generiert wurde. Die Uhr besitzt ein Display mit der zuletzt ausgegebenen Nummer.

- a) Zeichnen Sie ein Zustandsübergangsdiagramm für diese Kette mit allen Wahrscheinlichkeiten und Transitionen.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lampe nach exakt 2 Uhr-Ticks aufleuchtet.
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lampe nach exakt 3 Uhr-Ticks aufleuchtet.
- d) Nehmen Sie an, Sie bekommen das Gerät in die Hand während das Display die Nummer 1 anzeigt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lampe nach exakt 2 Uhr-Ticks anfängt zu leuchten? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für ein Leuchten nach 3 Uhr-Ticks?