

Modellierung und Analyse eingebetteter und verteilter Systeme

Übungsblatt 7

Ausgabe: 20. November, **Abgabe:** 27. November

Hinweis: Die Besprechung findet am 1.12 statt.

Aufgabe 7.1 Begriffe/Verständnisfragen

Erläutern Sie folgende Begriffe:

- absorbierende, transiente, rekurrente Zustände
- zeitdiskrete/zeitkontinuierliche Markov-Ketten
- Gedächtnislosigkeit
- stationäres Verhalten
- Zeithomogenität
- Globale Flussgleichungen

1. Welche Eigenschaften hat die Ratenmatrix (Generatormatrix) einer CTMC?
2. Welche Eigenschaften hat die Transitionsmatrix einer DTMC?
3. Was ist der Unterschied zwischen transienter und stationärer Analyse? Geben Sie Beispiele für Fragestellungen, die mit einer transienten Analyse behandelt werden können.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte) Kontinuierliche Markov-Prozesse

Betrachten Sie die Markov-Kette $\{X(t)\}_{t \geq 0}^{\infty}$ mit Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und Transitionsratenmatrix Q

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix}.$$

- a) Zeichnen Sie das Transitionsratendiagramm.

- b) Ermitteln Sie stationären Zustandswahrscheinlichkeiten (wenn sie existieren) für $\lambda = 1$, $\mu_1 = \frac{3}{2}$ und $\mu_2 = \frac{7}{4}$.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte) Markov-Kette für ein Defekt-Intakt-System

Ein Glühweinautomat und ein Weihnachtspunschautomat sind hin und wieder außer Betrieb. Die Zeit zwischen zwei Ausfällen sei exponentialverteilt mit Erwartungswerten e_G bzw. e_P . Die Instandsetzungszeiten für die beiden Geräte seien ebenfalls exponentialverteilt mit Erwartungswerten e_{IG} bzw. e_{IP} .

- a) Stellen Sie für dieses System den Zustandsübergangsgraphen auf.
- b) Ermitteln Sie für die Parameter $e_G = 20$, $e_P = 10$, $e_{IG} = 5$, $e_{IP} = 4$ die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten.
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Gerät defekt?

Aufgabe 7.4 (4 Punkte) Markov-Ketten

Benutzen Sie die Methode der Uniformisierung, um eine zeitdiskrete Markov-Kette für $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ aus der Aufgabe 7.2 abzuleiten. Ermitteln Sie die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten (falls sie existieren). Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Teil b) der Aufgabe 7.2.