

Modellierung und Analyse eingebetteter und verteilter Systeme

Übungsblatt 4

Ausgabe: 29. Oktober, **Abgabe:** 5. November

Hinweis: Die Besprechung findet am 9.11 statt.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte) **Markov-Ketten**

Das Brutverhalten der Gemeinen Brüll-Amsel, einer Vogelart, ist wie folgt:

- Ein Paar kann pro Jahr ein Gelege (1 oder 2 Eier) ausbrüten.
- Wenn am Jahresende kein Küken im Nest ist, so brüten die Vögel zu 50% wieder im nächsten Jahr.
- Ist ein Küken im Nest, so verringert sich die Chance auf ein weiteres Ei für das nächste Jahr auf 40%.
- Sitzen schon zwei Küken im Nest, so fällt die Chance auf nur 10% für Nachfahren im nächsten Jahr.
- Besitzt das Paar schon 3 Küken, so stoppt der Brüten-Prozess.
- Die Vögel bebrüten normalerweise nur ein Ei, die Chance auf zwei Eier gleichzeitig (also Zwillinge) liegt bei 2% pro Jahr.

Übrigens: Trotz ihres mehr als auffälligen Verhaltens sind die Brüll-Amseln sehr erfolgreiche Eltern; aus jedem Ei schlüpft auch ein Küken. Die kleinen Vögel sind jedoch ewige Nesthocker, im Beobachtungszeitraum wird keines flügge und verlässt das Nest oder wird von Raubtieren erlegt.

Sei X_k die Anzahl der Nachkommen eines Pärchens im k -ten Jahr. Es gilt zu Anfang $X_k = 0$.

- a) Welchen Zustandsraum hat diese Kette? Zeichnen Sie das Transitionsdiagramm.
- b) Ermitteln Sie die Transitionswahrscheinlichkeit für $P(X_2 = j | X_1 = i)$ für alle möglichen Werte von i und j .
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Pärchen ein Küken am Ende des zweiten Jahres hat.

Hinweis: Maximale Anzahl von Küken im Nest ist vier (zwei Küken im Nest, Eltern bekommen Zwillinge).

Aufgabe 4.2 (4 Punkte) **Markov-Ketten: Klassifikation der Zustände**

Gegeben sei folgende Transitionswahrscheinlichkeits-Matrix P

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

- Ermitteln Sie die transienten und die rekurrenten Zustände.
- Ist P eine irreduzible oder eine reduzible Markov-Kette? Ist sie periodisch oder aperiodisch?
- Finden Sie alle geschlossenen irreduziblen Mengen der Kette.