Prof. Dr. Peter Buchholz, Clara Scherbaum M.Sc. Sommersemester 2019

Modellgestützte Analyse und Optimierung
Übungsblatt 12

Ausgabe: 19.06.2019, **Abgabe:** 01.07.2019

Aufgabe 12.1: (4 Punkte)

Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ jeweils ein Beispiel für ein lineares Programm mit

a) einem eindeutigen Optimum bei unbeschränktem zulässigen Bereich;

b) einem eindeutigen Optimum bei beschränktem zulässigen Bereich;

c) mehreren Optima;

d) keinem Optimum bei nicht leerem zulässigen Bereich.

Aufgabe 12.2: (3 Punkte)

Geben Sie notwendige und hinreichende Kriterien für s und t an, so dass das folgende lineare Programm

$$max\ x_1 + x_2 \tag{1}$$
$$u.d.N.\ sx_1 + tx_2 \leq 1 \tag{2}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3}$$

a) mindestens eine optimale Lösung hat,

b) genau eine optimale Lösung hat,

c) unbeschränkt ist.

Aufgabe 12.3: (5 Punkte)

Sei folgende Instanz des Rucksackproblems gegeben:

Gegenstand j	1	2	3	4	5	6
Wert c_j	8	8	6	10	12	12
Gewicht a_j	1	2	2	4	6	10
Relativer Wert $\frac{c_j}{a_j}$	8	4	3	2.5	2	1.2

Für das nicht überschreitbare Gesamtgewicht gilt $A = 12$.

a) Berechnen Sie eine zulässige Lösung $\boldsymbol{x}_H$ sowie deren Zielfunktionswert F_H mittels Greedy-Heuristik.

b) Nehmen Sie an, dass es eine optimale Lösung $\boldsymbol{x}^*$ mit $x_1^* = 1$ und $x_6^* = 0$ gibt. Wir nummerieren die verbliebenen Gegenstände um, so dass x_j, c_j und a_j für $j = 2, ..., 5$ zu x_{j-1}, c_{j-1} und a_{j-1} werden. Dies ergibt die Daten in der unten angegebenen Tabelle mit dem maximalen Gesamtgewicht $A = 11$. Den Vektor mit den „neuen Komponenten" $x_1, \ldots, x_4$ bezeichnen wir mit $\hat{\boldsymbol{x}}$ im Unterschied zum Vektor $\boldsymbol{x}$ mit den „alten Komponenten" $x_1, \ldots, x_6$.

Gegenstand j	1	2	3	4
Wert c_j	8	6	10	12
Gewicht a_j	2	2	4	6
Relativer Wert $\frac{c_j}{a_j}$	4	3	2.5	2

Listen Sie die einzelnen Iterationsschritte des Branch-and-Bound-Verfahrens auf und zeigen Sie den im Laufe des Verfahrens abgearbeiteten Suchbaum. Starten Sie dabei mit der zulässigen Anfangslösung $\hat{\boldsymbol{x}}_H = (1, 1, 1, 0)^T$, die sich mit der Greedy-Heuristik ergibt. Nehmen Sie das Gewicht dieser Lösung als initiale untere Schranke.

Jeder Knoten s, den Sie betrachten, hat die folgenden Eigenschaften:

- $h(s)$: Die Tiefe des Knotens im Suchbaum
- $J(s) \subset \{1, \ldots, h(s)\}$ die Menge der Gegenstände, die in enthalten sind
- $\hat{\boldsymbol{x}}(s) = (x_1, \ldots, x_{h(s)})$, wobei $x_i \in \{0, 1\}$ und $x_i = 1$ genau dann, wenn $i \in J(s)$
- Die Schrankenfunktion ist gegeben durch: $b(s) = \sum\limits_{i \in J(s)} c_i + (A - \sum\limits_{i \in J(s)} a_i) \cdot \frac{c_{h(s)+1}}{a_{h(s)+1}}$.