

Modellierung und Analyse eingebetteter und verteilter Systeme

Übungsblatt 6

Ausgabe: 13. November, Abgabe: 20. November

Aufgabe 6.1 Kontinuierliche Markov-Prozesse

Betrachten Sie die Markov-Kette $\{X(t)\}_{t \geq 0}^{\infty}$ mit Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und Transitionsratenmatrix Q

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix}.$$

- Zeichnen Sie das Transitionsratendiagramm. Ist das System für Eingaben größer 0 irreduzibel?
- Im Folgenden gehen wir von $(\lambda = 1, \mu_1 = \frac{3}{2}$ und $\mu_2 = \frac{7}{4})$ aus. Benutzen Sie die Methode der Uniformisierung für die konkrete Markov-Kette, um eine zeitdiskrete Markov-Kette abzuleiten.
- Ermitteln Sie stationären Zustandswahrscheinlichkeiten (wenn sie existieren)

Aufgabe 6.2 Markov-Kette für ein Defekt-Intakt-System

Ein Glühweinautomat und ein Weihnachtspunschautomat weisen ein bestimmtes Ausfallverhalten auf. Die Zeit zwischen zwei Ausfällen sei exponentialverteilt mit Erwartungswerten \mathbb{E}_{G-} bzw. \mathbb{E}_{P-} . Die Instandsetzungszeiten für die beiden Geräte können ebenfalls als exponentialverteilt angesehen werden mit Erwartungswerten \mathbb{E}_{G+} bzw. \mathbb{E}_{P+} .

- Stellen Sie für dieses System den Zustandsübergangsgraphen auf.
- Ermitteln Sie für die Parameter $\mathbb{E}_{G-} = 20, \mathbb{E}_{P-} = 10, \mathbb{E}_{G+} = 5, \mathbb{E}_{P+} = 4$ die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten, falls sie existieren.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Gerät defekt?

Aufgabe 6.3 Markov-Ketten

Ein elektronisches Gerät mit interner Uhr generiert zufällig die Nummern 0, 1 oder 2 bei jedem Ticken der Uhr. Dabei werden die folgenden Regeln beachtet:

- Wenn zuletzt eine 0 generiert wurde, so ist die nächste Zahl wieder eine 0 mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 oder eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0,5.
- Wenn zuletzt eine 1 generiert wurde, so ist die nächste Zahl wieder eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit von 0,4 oder eine 2 mit der Wahrscheinlichkeit von 0,6.
- Wenn zuletzt eine 2 generiert wurde, so ist die nächste Zahl eine 0 mit der Wahrscheinlichkeit von 0,7 oder eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit von 0,3.

Bevor die Uhr anfängt zu Ticken wird eine Nummer generiert: 0 mit Wahrscheinlichkeit 0,3, 1 mit Wahrscheinlichkeit 0,3 und 2 mit Wahrscheinlichkeit 0,4. Am Gerät ist eine Lampe angebracht die aufleuchtet sobald die Zahlenfrequenz $\{1, 2, 0\}$ generiert wurde. Die Uhr besitzt ein Display mit der zuletzt ausgegebenen Nummer.

- a) Bestimmen Sie einen Markov-Prozess, der das Modell repräsentiert. Zeichnen Sie ein Zustandstransitionsdiagramm für diese Kette mit allen Wahrscheinlichkeiten und Transitionen.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lampe nach exakt 2 Uhr-Ticks aufleuchtet.
- c) Nehmen Sie an, Sie bekommen das Gerät in die Hand während das Display die Nummer 1 anzeigt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lampe nach exakt 2 Uhr-Ticks anfängt zu leuchten? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für ein Leuchten nach 3 Uhr-Ticks?
- d) Ist das System irreduzibel? Welche Zustände sind transient und welche rekurrent? Existiert eine echte geschlossene irreduzibele Teilmenge der Kette?