

Modellgestützte Analyse und Optimierung Übungsblatt 4

Ausgabe: 11.05.2020, Abgabe: 18.05.2020

Aufgabe 4.1: Eigenschaften von Zufallszahlengeneratoren (2 Punkte)

Stochastische Simulation erfordert Zufallszahlengeneratoren, die folgende Eigenschaften besitzen sollten:

- Sie erzeugen unabhängige, gleichverteilte Zahlen.
- Sie erzeugen Folgen mit großer Periode.
- Sie erzeugen reproduzierbare Zahlen.
- Die Zahlen sind einfach und schnell berechenbar.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Generatoren diese Eigenschaften besitzen:

1. Erzeugung einer Folge von "0"en und "1"en durch das Werfen einer idealen Münze. Herausschneiden einer beliebigen Teilfolge der Länge n und Interpretation dieser Teilfolge als Binärzahl.
2. Messen der natürlichen Radioaktivität. Jedes mal wenn diese einen Schwellwert S überschreitet, wird ein Impuls ausgelöst und gezählt. Nach Ablauf eines festen Zeitintervalls wird der Zählerstand abgelesen und so ein neues Element der Folge erzeugt.
3. Verfahren 1) wird einmal durchgeführt und die entstandene Zahlenfolge als Tafel gespeichert.
4. Midsquare-Verfahren nach John von Neumann
5. Kongruenzgenerator nach Lehmer, wobei der Startwert (seed) als $f(\text{Systemzeit}, \text{Datum}, \text{Process-ID})$ gewählt wird.

Aufgabe 4.2: Kongruenzgeneratoren (4 Punkte)

Betrachten Sie den linearen Kongruenzgenerator

$$Z_i = (a \cdot Z_{i-1} + c) \mod m$$

mit $m = 1000$, $a = 21$, $c = 3$.

1. Zeigen Sie, dass der Generator volle Periodenlänge hat.
2. Initialisieren Sie den Generator mit $Z_0 = 871$ und erzeugen Sie 10 Zufallszahlen.
3. Transformieren Sie ihre Zufallszahlen in $[2,4)$ -gleichverteilte Zufallszahlen.

4. Berechnen Sie den Mittelwert Ihrer "Ziehungen" und vergleichen Sie den Wert mit dem Erwartungswert einer auf $[2, 4)$ -gleichverteilten Zufallsvariable.
5. Bestimmen Sie die Anzahl der "Runs" in ihrer Zufallszahlenfolge nach dem Runs-Test und vergleichen Sie sie mit dem theoretisch erwarteten Wert für lange Zufallszahlenfolgen.

Aufgabe 4.3: Ziehen von Zufallszahlen aus bestimmten Verteilungen (4 Punkte)

Formulieren Sie in Pseudocode Routinen, welche Zufallszahlen gemäß folgender Verteilungen erzeugen:

1. Gleichverteilung $U(a, b)$
2. Exponentialverteilung mit Rate λ
3. Geometrische Verteilung mit Parameter p

Ihnen steht dafür ein Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der $U(0, 1)$ gleichverteilte Zufallszahlen erzeugt.