Augabe 7.1a) Unabhängigkeit der Beobachtungen

Augabe 7.1a) Unabhängigkeit der Beobachtungen

- Zufallszahlen, die Simulation zugrunde liegen sind unabhängig

Augabe 7.1a) Unabhängigkeit der Beobachtungen

- Zufallszahlen, die Simulation zugrunde liegen sind unabhängig
- Für jeden Simulationsdurchlauf neue Initialisierung mit neuen Zufallszahlen

Aufgabe 7.1b) - Tschbyscheff-Ungleichung

Für eine Zufallsvariable Y mit Erwartungswert $E[Y]$ und Varianz $\sigma^2(Y)$ gilt für ein beliebiges $c > 0$:

$$P\left[|Y - E[Y]| \geq c\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{c^2} \tag{1}$$

Aufgabe 7.1b) - Tschbyscheff-Ungleichung

Für eine Zufallsvariable Y mit Erwartungswert $E[Y]$ und Varianz $\sigma^2(Y)$ gilt für ein beliebiges $c > 0$:

$$P\left[|Y - E[Y]| \geq c\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{c^2} \tag{1}$$

Angewendet auf die Berechnung von Konfidenzintervallen:

$$P\left[|\bar{Y}_{30} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \tag{2}$$

Aufgabe 7.1b) - Tschbyscheff-Ungleichung

Für eine Zufallsvariable Y mit Erwartungswert $E[Y]$ und Varianz $\sigma^2(Y)$ gilt für ein beliebiges $c > 0$:

$$P\left[|Y - E[Y]| \geq c\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{c^2} \tag{1}$$

Angewendet auf die Berechnung von Konfidenzintervallen:

$$P\left[|\bar{Y}_{30} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \tag{2}$$

Für die Berechnung des Konfidenzintervalls folgende Schritte notwendig:

- Berechnung ϵ (α,n, $\sigma^2(Y)$ gegeben)
- Einsetzen

7.1b) - Berechnung Konfidenzintervall

$$P\left[|\bar{Y_{30}} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \tag{3}$$

7.1b) - Berechnung Konfidenzintervall

$$P\left[|\bar{Y}_{30} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \tag{3}$$

Für das 90 % Konfidenzintervall mit $\alpha = 0,1$ $n = 30$ gilt:

7.1b) - Berechnung Konfidenzintervall

$$P\left[|\bar{Y}_{30} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \tag{3}$$

Für das 90 % Konfidenzintervall mit $\alpha = 0,1$ $n = 30$ gilt:

$$\alpha = 0,1 = \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2}$$

7.1b) - Berechnung Konfidenzintervall

$$P\left[|\bar{Y_{30}} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \tag{3}$$

Für das 90 % Konfidenzintervall mit $\alpha = 0,1$ $n = 30$ gilt:

$$\alpha = 0,1 = \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2}$$
$$\Leftrightarrow 3\epsilon^2 = \sigma^2(Y)$$

7.1b) - Berechnung Konfidenzintervall

$$P\left[|\bar{Y}_{30} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \tag{3}$$

Für das 90 % Konfidenzintervall mit $\alpha = 0,1$ $n = 30$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha = 0,1 &= \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \\
\Leftrightarrow 3\epsilon^2 &= \sigma^2(Y) \\
\Leftrightarrow \epsilon^2 &= \frac{\sigma^2(Y)}{3}
\end{aligned}$$

7.1b) - Berechnung Konfidenzintervall

$$P\left[|\bar{Y_{30}} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \tag{3}$$

Für das 90 % Konfidenzintervall mit $\alpha = 0,1$ $n = 30$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha = 0,1 &= \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \\
\Leftrightarrow 3\epsilon^2 &= \sigma^2(Y) \\
\Leftrightarrow \epsilon^2 &= \frac{\sigma^2(Y)}{3} \\
\Rightarrow \epsilon &= \frac{\sigma(Y)}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

7.1b) - Berechnung Konfidenzintervall

$$P\left[|\bar{Y_{30}} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \tag{3}$$

Für das 90 % Konfidenzintervall mit $\alpha = 0,1$ $n = 30$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha = 0,1 &= \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \\
\Leftrightarrow 3\epsilon^2 &= \sigma^2(Y) \\
\Leftrightarrow \epsilon^2 &= \frac{\sigma^2(Y)}{3} \\
\Rightarrow \epsilon &= \frac{\sigma(Y)}{\sqrt{3}} \Rightarrow \epsilon \approx \frac{\sqrt{1,356709}}{\sqrt{3}} \approx 0,672485
\end{aligned}$$

7.1b) - Berechnung Konfidenzintervall

$$P\left[|\bar{Y_{30}} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \quad (3)$$

Für das 90 % Konfidenzintervall mit $\alpha = 0,1$ $n = 30$ gilt:

$$\alpha = 0,1 = \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2}$$
$$\Leftrightarrow 3\epsilon^2 = \sigma^2(Y)$$
$$\Leftrightarrow \epsilon^2 = \frac{\sigma^2(Y)}{3}$$
$$\Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma(Y)}{\sqrt{3}} \Rightarrow \epsilon \approx \frac{\sqrt{1,356709}}{\sqrt{3}} \approx 0,672485$$

Mit Wahrscheinlichkeit 90% liegt der Erwartungswert im Intervall

$$[\bar{Y_{30}} \pm \frac{\sigma(Y)}{\sqrt{3}}]$$

7.1b) - Berechnung Konfidenzintervall

$$P\left[|\bar{Y}_{30} - E[Y]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \tag{3}$$

Für das 90 % Konfidenzintervall mit $\alpha = 0,1$ $n = 30$ gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha = 0,1 &= \frac{\sigma^2(Y)}{n \cdot \epsilon^2} \\
\Leftrightarrow 3\epsilon^2 &= \sigma^2(Y) \\
\Leftrightarrow \epsilon^2 &= \frac{\sigma^2(Y)}{3} \\
\Rightarrow \epsilon &= \frac{\sigma(Y)}{\sqrt{3}} \Rightarrow \epsilon \approx \frac{\sqrt{1,356709}}{\sqrt{3}} \approx 0,672485
\end{aligned}$$

Mit Wahrscheinlichkeit 90% liegt der Erwartungswert im Intervall

$$[\bar{Y}_{30} \pm \frac{\sigma(Y)}{\sqrt{3}}] = [4.868667 \pm 0,672485] = [4,196182, 5,541152]$$

- Approximation über die Normalverteilung:

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

- Approximation über die Normalverteilung:
- Hier kann das Konfidenzintervall durch die folgende Gleichung gewonnen werden:

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

- Der zentrale Grenzwertsatz besagt: Seien $Y_1, ..., Y_n$ unabhängig identisch verteilte ZV mit $E[Y] = \mu$, Varianz σ^2 und sei $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

- Der zentrale Grenzwertsatz besagt: Seien $Y_1, ..., Y_n$ unabhängig identisch verteilte ZV mit $E[Y] = \mu$, Varianz σ^2 und sei $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
- Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

- Der zentrale Grenzwertsatz besagt: Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig identisch verteilte ZV mit $E[Y] = \mu$, Varianz σ^2 und sei $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$
- Dann gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$
- Dann gilt weiter: $\lim\limits_{n \to \infty} Z_n \sim N(0, 1)$

Für das Konfidenzintervall gilt also:

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

Für das Konfidenzintervall gilt also:

$$P\left[\left|\frac{\bar{Y}_j - E(\bar{Y}_j)}{\bar{S}/\sqrt{n}}\right| \geq \epsilon\right] = \alpha$$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

Für das Konfidenzintervall gilt also:

$$P\left[\left|\frac{\bar{Y}_j - E(\bar{Y}_j)}{\bar{S}/\sqrt{n}}\right| \geq \epsilon\right] = \alpha$$

$$\Rightarrow P[|\bar{Y}_{30} - E[y]| \leq \epsilon S_{30}/\sqrt{30}] = \alpha$$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

- Damit ergibt sich das Konfidenzintervall:

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

- Damit ergibt sich das Konfidenzintervall:
- $\bar{Y}_{30} \pm \epsilon_{\frac{\alpha}{2}} S_{30}/\sqrt{30}$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

- Damit ergibt sich das Konfidenzintervall:
- $\bar{Y}_{30} \pm \epsilon_{\frac{\alpha}{2}} S_{30}/\sqrt{30}$
- 90% Konfidenzintervall $\alpha = 0.1, n = 30, \epsilon_{\alpha} = 1.645$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

- Damit ergibt sich das Konfidenzintervall:
- $\bar{Y}_{30} \pm \epsilon_{\frac{\alpha}{2}} S_{30}/\sqrt{30}$
- 90% Konfidenzintervall $\alpha = 0.1, n = 30, \epsilon_{\alpha} = 1.645$
    - $\bar{Y}_{30} \pm \epsilon_{\frac{\alpha}{2}} S_{30}/\sqrt{30}$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

- Damit ergibt sich das Konfidenzintervall:
- $\bar{Y}_{30} \pm \epsilon_{\frac{\alpha}{2}} S_{30}/\sqrt{30}$
- 90% Konfidenzintervall $\alpha = 0.1, n = 30, \epsilon_{\alpha} = 1.645$
  - $\bar{Y}_{30} \pm \epsilon_{\frac{\alpha}{2}} S_{30}/\sqrt{30}$
  - $4.868667 \pm 1.645 \cdot 1.164779/\sqrt{30} = [4.5188, 5.218]$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 c

- Damit ergibt sich das Konfidenzintervall:
- $\bar{Y}_{30} \pm \epsilon_{\frac{\alpha}{2}} S_{30}/\sqrt{30}$
- 90% Konfidenzintervall $\alpha = 0.1, n = 30, \epsilon_{\alpha} = 1.645$
  - $\bar{Y}_{30} \pm \epsilon_{\frac{\alpha}{2}} S_{30}/\sqrt{30}$
  - $4.868667 \pm 1.645 \cdot 1.164779/\sqrt{30} = [4.5188, 5.218]$
- 95 % Konfidenzintervall $\alpha = 0.05, n = 30, \epsilon_{\alpha} = ?$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 d

- Ein weiteres Verfahren, welches sich auf die Annahme einer Normalverteilung stützt arbeitet mit der t-Verteilung:

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 d

- Ein weiteres Verfahren, welches sich auf die Annahme einer Normalverteilung stützt arbeitet mit der t-Verteilung:
- Falls Y normalverteilt ist, dann ist
  - $\frac{\bar{Y}_n - E[Y]}{S/\sqrt{n}}$
- t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 d

- Ein weiteres Verfahren, welches sich auf die Annahme einer Normalverteilung stützt arbeitet mit der t-Verteilung:
- Falls Y normalverteilt ist, dann ist
  - $\frac{\bar{Y}_n - E[Y]}{S/\sqrt{n}}$
- t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden
- Für das Konfidenzintervall gilt:

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 d

- Ein weiteres Verfahren, welches sich auf die Annahme einer Normalverteilung stützt arbeitet mit der t-Verteilung:
- Falls Y normalverteilt ist, dann ist
  - $\frac{\bar{Y}_n - E[Y]}{S/\sqrt{n}}$
- t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden
- Für das Konfidenzintervall gilt:
  - $\bar{y}_n \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 d

- 90%Konfidenzintervall $\alpha = 0.1$, $n = 30$, $t_{29,0.95} = 1.699$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 d

- 90%Konfidenzintervall $\alpha = 0.1$, $n = 30$, $t_{29,0.95} = 1.699$
  - $\bar{y}_{30} \pm t_{29,0.95 \cdot s30} / \sqrt{30}$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 d

- 90%Konfidenzintervall $\alpha = 0.1$, $n = 30$, $t_{29,0.95} = 1.699$
  - $\bar{y_{30}} \pm t_{29,0.95 \cdot s30}/\sqrt{30}$
- $4.868667 \pm 1.699 \cdot 1.164779/\sqrt{30} = [4.50736, 5.229974]$

Übungsblatt 7 Aufgabe 1 d

- 90%Konfidenzintervall $\alpha = 0.1$, $n = 30$, $t_{29,0.95} = 1.699$
  - $\bar{y_{30}} \pm t_{29,0.95 \cdot s30}/\sqrt{30}$
- $4.868667 \pm 1.699 \cdot 1.164779/\sqrt{30} = [4.50736, 5.229974]$

- 95 % Konfidenzintervall $\alpha = 0.05$, $n = 30$, $t_{?,?} = ?$