Übung 6 Aufgabe 1.1

Zur Berechnung der Anpassungsgüte D und D' benötigen wir:

Übung 6 Aufgabe 1.1

Zur Berechnung der Anpassungsgüte D und D' benötigen wir:

- n_i Anzahl Werte Stichprobe im i-ten Intervall und $h_i = \frac{n_i}{n}$

Übung 6 Aufgabe 1.1

Zur Berechnung der Anpassungsgüte D und D' benötigen wir:

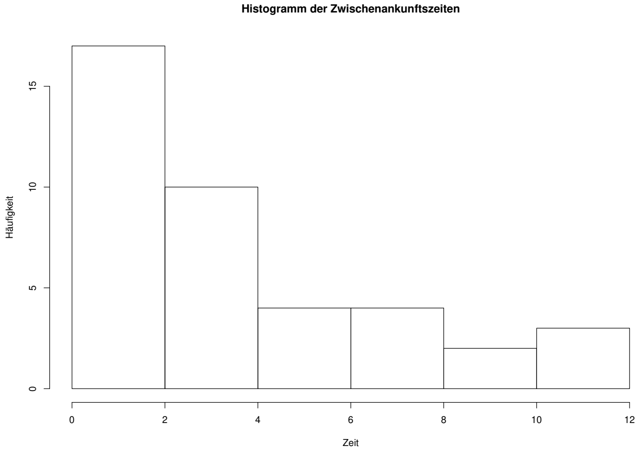
- n_i Anzahl Werte Stichprobe im i-ten Intervall und $h_i = \frac{n_i}{n}$
- $p_i = \int_{\triangle} f(x)dx$ wobei $\triangle_i$ das i-te Intervall ist

Übung 6 Aufgabe 1.1

Zur Berechnung der Anpassungsgüte D und D' benötigen wir:

- n_i Anzahl Werte Stichprobe im i-ten Intervall und $h_i = \frac{n_i}{n}$
- $p_i = \int_{\triangle} f(x)dx$ wobei $\triangle_i$ das i-te Intervall ist
- Abstandsmaß $D = \sum_i |h_i - p_i|$ und $D' = \sum_i (h_i - p_i)^2$

Übung 6 Aufgabe 1.1



Übung 6 Aufgabe 1.1

$$n = 40$$

Übung 6 Aufgabe 1.1

$$
\begin{aligned}
n &= 40 \\
n_i &= (17, 10, 4, 4, 2, 3)
\end{aligned}
$$

Übung 6 Aufgabe 1.1

$$
\begin{aligned}
n &= 40 \\
n_i &= (17, 10, 4, 4, 2, 3) \\
h_i &= n_i/n = (0.425, 0.25, 0.1, 0.1, 0.05, 0.075)
\end{aligned}
$$

Übung 6 Aufgabe 1.1

$$n = 40$$

$$n_i = (17, 10, 4, 4, 2, 3)$$

$$h_i = n_i/n = (0.425, 0.25, 0.1, 0.1, 0.05, 0.075)$$

$$f_t(x) = 0.2808 \cdot e^{-0.2808x} \text{ und } F_t(x) = 1 - e^{-0,2808x}$$

Übung 6 Aufgabe 1.1

$$
\begin{aligned}
n &= 40\\
n_i &= (17, 10, 4, 4, 2, 3)\\
h_i &= n_i/n = (0.425, 0.25, 0.1, 0.1, 0.05, 0.075)\\
f_t(x) &= 0.2808 \cdot e^{-0.2808x} \text{ und } F_t(x) = 1 - e^{-0{,}2808x}\\
p_i &= \int_{\triangle_i} f(x)dx
\end{aligned}
$$

Übung 6 Aufgabe 1.1

$$
\begin{aligned}
n &= 40 \\
n_i &= (17, 10, 4, 4, 2, 3) \\
h_i &= n_i/n = (0.425, 0.25, 0.1, 0.1, 0.05, 0.075) \\
f_t(x) &= 0.2808 \cdot e^{-0.2808x} \text{ und } F_t(x) = 1 - e^{-0,2808x} \\
p_i &= \int_{\triangle_i} f(x)dx \\
p_i &= (0.4297, 0.2451, 0.1397, 0.0797, 0.0455, 0.0259)
\end{aligned}
$$

Übung 6 Aufgabe 1.1

$$
\begin{aligned}
n &= 40 \\
n_i &= (17, 10, 4, 4, 2, 3) \\
h_i &= n_i/n = (0.425, 0.25, 0.1, 0.1, 0.05, 0.075) \\
f_t(x) &= 0.2808 \cdot e^{-0.2808x} \text{ und } F_t(x) = 1 - e^{-0,2808x} \\
p_i &= \int_{\triangle_i} f(x)dx \\
p_i &= (0.4297, 0.2451, 0.1397, 0.0797, 0.0455, 0.0259) \\
(h_i - p_i) &= (-0.0047, 0.0049, -0.0397, 0.0203, 0.0045, 0.0491)
\end{aligned}
$$

Übung 6 Aufgabe 1.1

Für die Abstandsmaße gilt also:

Übung 6 Aufgabe 1.1

Für die Abstandsmaße gilt also:

$$D = \sum_i |h_i - p_i| = 0.1232$$

Übung 6 Aufgabe 1.1

Für die Abstandsmaße gilt also:

$$D = \sum_i |h_i - p_i| = 0.1232$$
$$D' = \sum_i (h_i - p_i)^2 = 0.004465$$

Übung 6 Aufgabe 1.2

P-P-Plot/Q-Q-Plot

Übung 6 Aufgabe 1.2

P-P-Plot/Q-Q-Plot

- Gegenüberstellung von Wahrscheinlichkeiten bzw. Quantilen

P-P-Plot/Q-Q-Plot

- Gegenüberstellung von Wahrscheinlichkeiten bzw. Quantilen
- 1. Schritt: Sortiere Stichprobe aufsteigend

P-P-Plot/Q-Q-Plot

- Gegenüberstellung von Wahrscheinlichkeiten bzw. Quantilen
- 1. Schritt: Sortiere Stichprobe aufsteigend
    - $x_1, \ldots, x_{40}$ unsortierte Stichprobe

Übung 6 Aufgabe 1.2

P-P-Plot/Q-Q-Plot

- Gegenüberstellung von Wahrscheinlichkeiten bzw. Quantilen
- 1. Schritt: Sortiere Stichprobe aufsteigend
    - $x_1, ..., x_{40}$ unsortierte Stichprobe
    - $y_1, ..., y_{40}$ sortierte Stichprobe

Übung 6 Aufgabe 1.2

P-P-Plot/Q-Q-Plot

- Gegenüberstellung von Wahrscheinlichkeiten bzw. Quantilen
- 1. Schritt: Sortiere Stichprobe aufsteigend
  - $x_1, ..., x_{40}$ unsortierte Stichprobe
  - $y_1, ..., y_{40}$ sortierte Stichprobe
- 2. Schritt: Berechne den Wert der empirischen und den Wert der theoretischen Verteilungsfunktion

Übung 6 Aufgabe 1.2

P-P-Plot/Q-Q-Plot

- Gegenüberstellung von Wahrscheinlichkeiten bzw. Quantilen
- 1. Schritt: Sortiere Stichprobe aufsteigend
  - $x_1, ..., x_{40}$ unsortierte Stichprobe
  - $y_1, ..., y_{40}$ sortierte Stichprobe
- 2. Schritt: Berechne den Wert der empirischen und den Wert der theoretischen Verteilungsfunktion
  - hier: $F_e(x) = max_{y_i \leq x}(\frac{i}{n}) = max_{y_i \leq x}(\frac{i}{40})$

P-P-Plot/Q-Q-Plot

- Gegenüberstellung von Wahrscheinlichkeiten bzw. Quantilen
- 1. Schritt: Sortiere Stichprobe aufsteigend
  - $x_1, ..., x_{40}$ unsortierte Stichprobe
  - $y_1, ..., y_{40}$ sortierte Stichprobe
- 2. Schritt: Berechne den Wert der empirischen und den Wert der theoretischen Verteilungsfunktion
  - hier: $F_e(x) = max_{y_i \leq x}(\frac{i}{n}) = max_{y_i \leq x}(\frac{i}{40})$
  - $F_t(x) = 1 - e^{-0,2808x}$

Übung 6 Aufgabe 1.2

Lege Tabelle an:

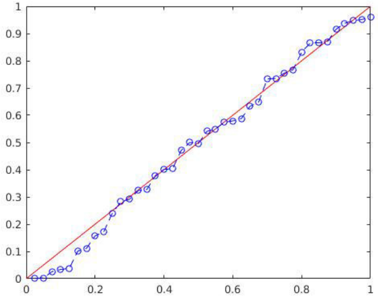
i	y_i	$F_e(y_i)$	$F_t(y_i)$
1	0.003	$\frac{1}{40}$	0.0008
2	0.01	$\frac{2}{40}$	0.0028
3	0.093	$\frac{3}{40}$	0.0258
4	0.122	$\frac{4}{40}$	0.0337
...	...	...	...

Übung 6 Aufgabe 1.2

- 3. Schritt: P-P-Plot zeichnen: Die Punkte sind $(F_e(y_i)|F_t(y_i))$ für $i = 1, .., 40$

Übung 6 Aufgabe 1.2

- 3. Schritt: P-P-Plot zeichnen: Die Punkte sind $(F_e(y_i)|F_t(y_i))$ für $i = 1, .., 40$



Übung 6 Aufgabe 1.2

- 4. Schritt: Für Q-Q-Plot werden Quantile benötigt:

Übung 6 Aufgabe 1.2

- 4. Schritt: Für Q-Q-Plot werden Quantile benötigt:
  - 0.003 ist das empirische $\frac{1}{40}$-Quantil der Stichprobe, da $F_e(0.003) = \frac{1}{40}$

Übung 6 Aufgabe 1.2

- 4. Schritt: Für Q-Q-Plot werden Quantile benötigt:
  - 0.003 ist das empirische $\frac{1}{40}$-Quantil der Stichprobe, da $F_e(0.003) = \frac{1}{40}$
  - Gesucht sind jeweils korrespondierende Quantile der theoretischen Verteilung, also:

Übung 6 Aufgabe 1.2

- 4. Schritt: Für Q-Q-Plot werden Quantile benötigt:
  - 0.003 ist das empirische $\frac{1}{40}$-Quantil der Stichprobe, da $F_e(0.003) = \frac{1}{40}$
  - Gesucht sind jeweils korrespondierende Quantile der theoretischen Verteilung, also:
    - $y_1 = 0.003 \;\; F_e(y_i = \frac{1}{40}) \;\; F_t(z_i) = \frac{1}{40}$

Übung 6 Aufgabe 1.2

- 4. Schritt: Für Q-Q-Plot werden Quantile benötigt:
  - 0.003 ist das empirische $\frac{1}{40}$-Quantil der Stichprobe, da $F_e(0.003) = \frac{1}{40}$
  - Gesucht sind jeweils korrespondierende Quantile der theoretischen Verteilung, also:
    - $y_1 = 0.003$ $F_e(y_i = \frac{1}{40})$ $F_t(z_i) = \frac{1}{40}$
  - Wie bestimmt man nun z_i?

Übung 6 Aufgabe 1.2

- 4. Schritt: Für Q-Q-Plot werden Quantile benötigt:
  - 0.003 ist das empirische $\frac{1}{40}$-Quantil der Stichprobe, da $F_e(0.003) = \frac{1}{40}$
  - Gesucht sind jeweils korrespondierende Quantile der theoretischen Verteilung, also:
    - $y_1 = 0.003 \;\; F_e(y_i = \frac{1}{40}) \;\; F_t(z_i) = \frac{1}{40}$
  - Wie bestimmt man nun z_i?
  - Dazu ist das Umstellen der Verteilungsfunktion F_t nötig

Übung 6 Aufgabe 1.2

z_i berechnen:

Übung 6 Aufgabe 1.2

z_i berechnen:

$$F_t(z_i) = i/40$$

z_i berechnen:

$$\begin{aligned} F_t(z_i) &= i/40 \\ \Rightarrow 1 - e^{-0.2808 z_i} &= i/40 \end{aligned}$$

Übung 6 Aufgabe 1.2

z_i berechnen:

$$\begin{aligned} F_t(z_i) &= i/40 \\ \Rightarrow 1 - e^{-0.2808 z_i} &= i/40 \\ \Rightarrow e^{-0.2808 z_i} &= 1 - i/40 \end{aligned}$$

Übung 6 Aufgabe 1.2

z_i berechnen:

$$
\begin{aligned}
F_t(z_i) &= i/40 \\
\Rightarrow 1 - e^{-0.2808 z_i} &= i/40 \\
\Rightarrow e^{-0.2808 z_i} &= 1 - i/40 \\
\Rightarrow -0.2808 z_i &= ln(1 - i/40)
\end{aligned}
$$

Übung 6 Aufgabe 1.2

z_i berechnen:

$$
\begin{aligned}
F_t(z_i) &= i/40 \\
\Rightarrow 1 - e^{-0.2808 z_i} &= i/40 \\
\Rightarrow e^{-0.2808 z_i} &= 1 - i/40 \\
\Rightarrow -0.2808 z_i &= ln(1 - i/40) \\
\Rightarrow z_i &= -\frac{1}{0.2808} ln(1 - i/40)
\end{aligned}
$$

Lege Tabelle an:

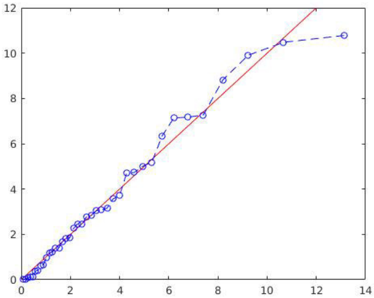
i	y_i	$F_e(y_i)$	$F_t(y_i)$	z_i
1	0.003	$\frac{1}{40}$	0.0008	0.0902
2	0.01	$\frac{2}{40}$	0.0028	0.1827
3	0.093	$\frac{3}{40}$	0.0258	0.2776
4	0.122	$\frac{4}{40}$	0.0337	0.3752
...	...	...	...	...

Übung 6 Aufgabe 1.2

- 5. Schritt: Zeichnen des Q-Q-Plots: Die Punkte sind $(y_i|z_i)$ für $i = 1, .., 40$

Übung 6 Aufgabe 1.2

- 5. Schritt: Zeichnen des Q-Q-Plots: Die Punkte sind $(y_i|z_i)$ für $i = 1, .., 40$



Übung 6 Aufgabe 1.3

Chi-Quadrat-Test

Übung 6 Aufgabe 1.3

Chi-Quadrat-Test

- Ein Verteilungs- bzw. Anpassungstest

Übung 6 Aufgabe 1.3

Chi-Quadrat-Test

- Ein Verteilungs- bzw. Anpassungstest
  - Überprüfung wie gut die Verteilung passt

Übung 6 Aufgabe 1.3

Chi-Quadrat-Test

- Ein Verteilungs- bzw. Anpassungstest
  - Überprüfung wie gut die Verteilung passt

Übung 6 Aufgabe 1.3

Chi-Quadrat-Test

- Ein Verteilungs- bzw. Anpassungstest
  - Überprüfung wie gut die Verteilung passt
  - Einteilung des Wertebereichs der theoretischen Verteilung im Intervall

Chi-Quadrat-Test

- Ein Verteilungs- bzw. Anpassungstest
  - Überprüfung wie gut die Verteilung passt
  - Einteilung des Wertebereichs der theoretischen Verteilung im Intervall
  - Prüfgröße χ^2-verteilt $\Rightarrow$ Hypothesenbildung möglich

Übung 6 Aufgabe 1.3

1. Schritt: Einteilung der Intervalle
   - $[b_0, b_1), [b_1, b_2), [b_2, b_3), [b_3, b_4)$

Übung 6 Aufgabe 1.3

1. Schritt: Einteilung der Intervalle
    - $[b_0, b_1), [b_1, b_2), [b_2, b_3), [b_3, b_4)$
        - Jedes Intervall besitzt die Wahrscheinlichkeit 0.25

Übung 6 Aufgabe 1.3

1. Schritt: Einteilung der Intervalle
   - $[b_0, b_1), [b_1, b_2), [b_2, b_3), [b_3, b_4)$
     - Jedes Intervall besitzt die Wahrscheinlichkeit 0.25
     - $b_0 = 0$ (dies ist die untere Grenze unserer Stichprobe)

Übung 6 Aufgabe 1.3

1. Schritt: Einteilung der Intervalle
   - $[b_0, b_1), [b_1, b_2), [b_2, b_3), [b_3, b_4)$
     - Jedes Intervall besitzt die Wahrscheinlichkeit 0.25
     - $b_0 = 0$ (dies ist die untere Grenze unserer Stichprobe)
     - Für b_i mit $i \neq 0$ gilt:

Übung 6 Aufgabe 1.3

1. Schritt: Einteilung der Intervalle

- $[b_0, b_1), [b_1, b_2), [b_2, b_3), [b_3, b_4)$
  - Jedes Intervall besitzt die Wahrscheinlichkeit 0.25
  - $b_0 = 0$ (dies ist die untere Grenze unserer Stichprobe)
  - Für b_i mit $i \neq 0$ gilt:
  - $F_t(b_1) = 0.25 \Rightarrow b_1 = 1{,}0246$

1. Schritt: Einteilung der Intervalle
   - $[b_0, b_1), [b_1, b_2), [b_2, b_3), [b_3, b_4)$
     - Jedes Intervall besitzt die Wahrscheinlichkeit 0.25
     - $b_0 = 0$ (dies ist die untere Grenze unserer Stichprobe)
     - Für b_i mit $i \neq 0$ gilt:
     - $F_t(b_1) = 0.25 \Rightarrow b_1 = 1{,}0246$
     - $F_t(b_2) = 0.5 \Rightarrow b_2 = 2{,}4685$

Übung 6 Aufgabe 1.3

1. Schritt: Einteilung der Intervalle
   - $[b_0, b_1), [b_1, b_2), [b_2, b_3), [b_3, b_4)$
     - Jedes Intervall besitzt die Wahrscheinlichkeit 0.25
     - $b_0 = 0$ (dies ist die untere Grenze unserer Stichprobe)
     - Für b_i mit $i \neq 0$ gilt:
     - $F_t(b_1) = 0.25 \Rightarrow b_1 = 1,0246$
     - $F_t(b_2) = 0.5 \Rightarrow b_2 = 2,4685$
     - $F_t(b_3) = 0.75 \Rightarrow b_3 = 4,9370$

1. Schritt: Einteilung der Intervalle
   - $[b_0, b_1), [b_1, b_2), [b_2, b_3), [b_3, b_4)$
     - Jedes Intervall besitzt die Wahrscheinlichkeit 0.25
     - $b_0 = 0$ (dies ist die untere Grenze unserer Stichprobe)
     - Für b_i mit $i \neq 0$ gilt:
     - $F_t(b_1) = 0.25 \Rightarrow b_1 = 1{,}0246$
     - $F_t(b_2) = 0.5 \Rightarrow b_2 = 2{,}4685$
     - $F_t(b_3) = 0.75 \Rightarrow b_3 = 4{,}9370$
     - $F_t(b_4) = 1 \Rightarrow b_4 = +\infty$

Übung 6 Aufgabe 1.3

2. Schritt: Berechnung der Prüfgröße bzw. der dafür benötigten Parameter

- n=Stichprobenwerte im Intervall
- p_i=theoretische Wahrscheinlichkeit des Intervalls
- $d = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$

Übung 6 Aufgabe 1.3

i	$[b_{i-1}, b_i)$	n_i	p_i
1	$[0, 1.0246)$	10	0.25
2	$[1.0246, 2.4685)$	9	0.25
3	$[2.4685, 4.9370)$	10	0.25
4	$[4.9370, \infty)$	11	0.25

Übung 6 Aufgabe 1.3

- $d = \frac{1}{5}$

Übung 6 Aufgabe 1.3

- $d = \frac{1}{5}$
- d ist χ^2-verteilt mit 2 Freiheitsgraden

Übung 6 Aufgabe 1.3

Bewertung der Güte der Approximation:

- 1. Schritt: Festlegung Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$

Übung 6 Aufgabe 1.3

Bewertung der Güte der Approximation:

- 1. Schritt: Festlegung Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$
- 2. Schritt $\chi^2_{0,1} = 4,61$

Übung 6 Aufgabe 1.3

Bewertung der Güte der Approximation:

- 1. Schritt: Festlegung Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$
- 2. Schritt $\chi^2_{0,1} = 4,61$
- $d = 0.2 \leq 4.61 \Rightarrow$ Hypothese wird angenommen.

Übung 6 Aufgabe 1.3

Bewertung der Güte der Approximation:

- 1. Schritt: Festlegung Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$
- 2. Schritt $\chi^2_{0,1} = 4,61$
- $d = 0.2 \leq 4.61 \Rightarrow$ Hypothese wird angenommen.
- Bei hohem Wert der Prüfgröße (Abweichung empirischer bzw. theoretischer Verteilung) wäre H_0 zum Signifikanzniveau α verworfen worden.

6.1.4 Kolmogorov Smirnov-Test

- Vergleich von zwei Zufallsvariablen mittels Prüfgröße, die Abstand zwischen empirischer und theoretischer Verteilung nutzt

6.1.4 Kolmogorov Smirnov-Test

- Vergleich von zwei Zufallsvariablen mittels Prüfgröße, die Abstand zwischen empirischer und theoretischer Verteilung nutzt
- Abstand $d_n = ||F_e - F_t|| = \underset{x}{sup}\ |F_e(x) - F_t(x)|$

  $\Rightarrow$ Berechne diesen Abstand

6.1.4 Kolmogorov Smirnov-Test

- Vergleich von zwei Zufallsvariablen mittels Prüfgröße, die Abstand zwischen empirischer und theoretischer Verteilung nutzt
- Abstand $d_n = ||F_e - F_t|| = \sup_x |F_e(x) - F_t(x)|$

  $\Rightarrow$ Berechne diesen Abstand
- Dieser Abstand muss an einer Sprungstelle der Funktion angenommen werden

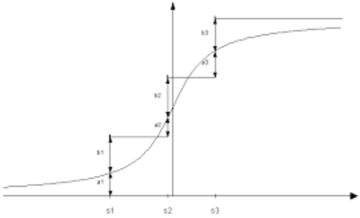


Abbildung: `https://www.fernuni-hagen.de/stochastik-mathphys/docs/leseprobe_ams.pdf`

6.1.4 Abstand berechnen

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{i}{n} - F_t(y_i) \right| \right\} = 0,0875$$

6.1.4 Abstand berechnen

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{i}{n} - F_t(y_i) \right| \right\} = 0,0875$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| F_t(y_i) - \frac{i-1}{n} \right| \right\} = 0,0653$$

6.1.4 Abstand berechnen

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{i}{n} - F_t(y_i) \right| \right\} = 0,0875$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| F_t(y_i) - \frac{i-1}{n} \right| \right\} = 0,0653$$

$$D_n = \max\{D_n^+, D_n^-\} = 0,0875$$

6.1.4 Abstand berechnen

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{i}{n} - F_t(y_i) \right| \right\} = 0,0875$$
$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| F_t(y_i) - \frac{i-1}{n} \right| \right\} = 0,0653$$
$$D_n = \max\{D_n^+, D_n^-\} = 0,0875$$

Teststatistik für den Fall, dass Parameter aus der empirischen Verteilung geschätzt wurden:

6.1.4 Abstand berechnen

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{i}{n} - F_t(y_i) \right| \right\} = 0,0875$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| F_t(y_i) - \frac{i-1}{n} \right| \right\} = 0,0653$$

$$D_n = \max\{D_n^+, D_n^-\} = 0,0875$$

Teststatistik für den Fall, dass Parameter aus der empirischen Verteilung geschätzt wurden:

$$\left(D_n - \frac{0,2}{n} \right) \cdot \left(\sqrt{n} + 0.26 + \frac{0.5}{\sqrt{n}} \right)$$

6.1.4 Abstand berechnen

$$D_n^+ = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\left|\frac{i}{n} - F_t(y_i)\right|\right\} = 0,0875$$

$$D_n^- = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\left|F_t(y_i) - \frac{i-1}{n}\right|\right\} = 0,0653$$

$$D_n = max\{D_n^+, D_n^-\} = 0,0875$$

Teststatistik für den Fall, dass Parameter aus der empirischen Verteilung geschätzt wurden:

$$\left(D_n - \frac{0,2}{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n} + 0.26 + \frac{0.5}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(0,0875 - \frac{0,2}{40}\right)\cdot\left(\sqrt{40} + 0,26 + \frac{0,5}{\sqrt{40}}\right)$$

6.1.4 Abstand berechnen

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \frac{i}{n} - F_t(y_i) \right| \right\} = 0,0875$$
$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| F_t(y_i) - \frac{i-1}{n} \right| \right\} = 0,0653$$
$$D_n = max\{D_n^+, D_n^-\} = 0,0875$$

Teststatistik für den Fall, dass Parameter aus der empirischen Verteilung geschätzt wurden:

$$\left(D_n - \frac{0,2}{n} \right) \cdot \left(\sqrt{n} + 0.26 + \frac{0.5}{\sqrt{n}} \right)$$
$$= \left(0,0875 - \frac{0,2}{40} \right) \cdot \left(\sqrt{40} + 0,26 + \frac{0,5}{\sqrt{40}} \right)$$
$$= 0,5498$$

6.1.4 Einordnung der Teststatistik

- Signifikanzniveau $\alpha = 0,1 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,9$

6.1.4 Einordnung der Teststatistik

- Signifikanzniveau $\alpha = 0,1 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,9$
- Schau kritischen Wert in Tabelle nach: $0,99$

6.1.4 Einordnung der Teststatistik

- Signifikanzniveau $\alpha = 0,1 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,9$
- Schau kritischen Wert in Tabelle nach: $0,99$
- Da $0,5498 < 0,99$ Approximation wird akzeptiert

Aufgabe 6.2

Berechne den Batch-Mean mit Batch-Größe$= 4$ und mit 98% Konfidenzintervall:

Aufgabe 6.2

Berechne den Batch-Mean mit Batch-Größe$=4$ und mit 98% Konfidenzintervall:

Schritt 1: Aufteilung der Daten in Batches der Grösse 4 und Berechnung der jeweiligen Mittelwerte

Aufgabe 6.2

Berechne den Batch-Mean mit Batch-Größe$=4$ und mit 98% Konfidenzintervall:

Schritt 1: Aufteilung der Daten in Batches der Grösse 4 und Berechnung der jeweiligen Mittelwerte

- Beobachtungen $n = 32$
- Batchgröße $m = 4$
- Anzahl Gruppen $k = 8$

Aufgabe 6.2

- Gruppenmittelwerte $\overline{X}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X_{(i-1)m+j}$, $i = 1, \ldots, 8$
  - Batch 1: $(15.9, 15.1, 5.3, 4.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_1 = 10.175$

Aufgabe 6.2

- Gruppenmittelwerte $\overline{X}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} X_{(i-1)m+j}$, $i = 1, \ldots, 8$
  - Batch 1: $(15.9, 15.1, 5.3, 4.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_1 = 10.175$
  - Batch 2: $(1.7, 22.1, 2.0, 8.2)$ Mittelwert: $\overline{X}_2 = 8.5$

Aufgabe 6.2

- Gruppenmittelwerte $\overline{X}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X_{(i-1)m+j}$, $i = 1, \dots, 8$
  - Batch 1: $(15.9, 15.1, 5.3, 4.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_1 = 10.175$
  - Batch 2: $(1.7, 22.1, 2.0, 8.2)$ Mittelwert: $\overline{X}_2 = 8.5$
  - Batch 3: $(0.1, 1.5, 23.9, 10.8)$ Mittelwert: $\overline{X}_3 = 9.075$

Aufgabe 6.2

- Gruppenmittelwerte $\overline{X}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X_{(i-1)m+j}$, $i = 1, \dots, 8$
  - Batch 1: $(15.9, 15.1, 5.3, 4.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_1 = 10.175$
  - Batch 2: $(1.7, 22.1, 2.0, 8.2)$ Mittelwert: $\overline{X}_2 = 8.5$
  - Batch 3: $(0.1, 1.5, 23.9, 10.8)$ Mittelwert: $\overline{X}_3 = 9.075$
  - Batch 4: $(21.3, 21.7, 14.2, 5.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_4 = 15.65$

Aufgabe 6.2

- Gruppenmittelwerte $\overline{X}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X_{(i-1)m+j}$, $i = 1, \ldots, 8$
  - Batch 1: $(15.9, 15.1, 5.3, 4.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_1 = 10.175$
  - Batch 2: $(1.7, 22.1, 2.0, 8.2)$ Mittelwert: $\overline{X}_2 = 8.5$
  - Batch 3: $(0.1, 1.5, 23.9, 10.8)$ Mittelwert: $\overline{X}_3 = 9.075$
  - Batch 4: $(21.3, 21.7, 14.2, 5.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_4 = 15.65$
  - Batch 5: $(4.4, 18.6, 5.0, 1.8)$ Mittelwert: $\overline{X}_5 = 7.45$

Aufgabe 6.2

- Gruppenmittelwerte $\overline{X}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} X_{(i-1)m+j}$, $i = 1, \ldots, 8$
  - Batch 1: $(15.9, 15.1, 5.3, 4.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_1 = 10.175$
  - Batch 2: $(1.7, 22.1, 2.0, 8.2)$ Mittelwert: $\overline{X}_2 = 8.5$
  - Batch 3: $(0.1, 1.5, 23.9, 10.8)$ Mittelwert: $\overline{X}_3 = 9.075$
  - Batch 4: $(21.3, 21.7, 14.2, 5.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_4 = 15.65$
  - Batch 5: $(4.4, 18.6, 5.0, 1.8)$ Mittelwert: $\overline{X}_5 = 7.45$
  - Batch 6: $(8.8, 1.0, 11.3, 4.7)$ Mittelwert: $\overline{X}_6 = 6.45$

Aufgabe 6.2

- Gruppenmittelwerte $\overline{X}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X_{(i-1)m+j}$, $i = 1, \dots, 8$
  - Batch 1: $(15.9, 15.1, 5.3, 4.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_1 = 10.175$
  - Batch 2: $(1.7, 22.1, 2.0, 8.2)$ Mittelwert: $\overline{X}_2 = 8.5$
  - Batch 3: $(0.1, 1.5, 23.9, 10.8)$ Mittelwert: $\overline{X}_3 = 9.075$
  - Batch 4: $(21.3, 21.7, 14.2, 5.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_4 = 15.65$
  - Batch 5: $(4.4, 18.6, 5.0, 1.8)$ Mittelwert: $\overline{X}_5 = 7.45$
  - Batch 6: $(8.8, 1.0, 11.3, 4.7)$ Mittelwert: $\overline{X}_6 = 6.45$
  - Batch 7: $(15.3, 23.7, 12.9, 14.5)$ Mittelwert: $\overline{X}_7 = 16.6$

Aufgabe 6.2

- Gruppenmittelwerte $\overline{X}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} X_{(i-1)m+j}$, $i = 1, \ldots, 8$
  - Batch 1: $(15.9, 15.1, 5.3, 4.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_1 = 10.175$
  - Batch 2: $(1.7, 22.1, 2.0, 8.2)$ Mittelwert: $\overline{X}_2 = 8.5$
  - Batch 3: $(0.1, 1.5, 23.9, 10.8)$ Mittelwert: $\overline{X}_3 = 9.075$
  - Batch 4: $(21.3, 21.7, 14.2, 5.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_4 = 15.65$
  - Batch 5: $(4.4, 18.6, 5.0, 1.8)$ Mittelwert: $\overline{X}_5 = 7.45$
  - Batch 6: $(8.8, 1.0, 11.3, 4.7)$ Mittelwert: $\overline{X}_6 = 6.45$
  - Batch 7: $(15.3, 23.7, 12.9, 14.5)$ Mittelwert: $\overline{X}_7 = 16.6$
  - Batch 8: $(40.3, 4.8, 5.6, 9.4)$ Mittelwert: $\overline{X}_8 = 15.025$

Aufgabe 6.2

2. Schritt: Schätzung des Erwartungswerts und der Varianz

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \overline{X}_i, \tag{1}$$

Aufgabe 6.2

2. Schritt: Schätzung des Erwartungswerts und der Varianz

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \overline{X}_i, \qquad (1)$$

somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{\bar{X}} &= \frac{1}{8}(10.175 + 8.5 + 9.075 + 15.65 + 7.45 + 6.45 + 16.6 + 15.025) \\ &= 11.11563 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2

Der Varianzschätzer ist

$$S^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 \tag{2}$$

Als Wert ergibt sich also

$$S^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^{k} (\bar{X}_i - 11.11563)^2 = 16.14535 \tag{3}$$

Aufgabe 6.2a)

Approximation über die Normalverteilung:

- Der Wert $Z_n = \frac{\bar{\bar{X}} - E(\bar{X}_j)}{S^2/\sqrt{n}}$ ist für $n \to \infty$ normalverteilt (zentraler Grenzwertsatz)

Aufgabe 6.2a)

Approximation über die Normalverteilung:

- Der Wert $Z_n = \frac{\bar{\bar{X}} - E(\bar{X}_j)}{S^2/\sqrt{n}}$ ist für $n \to \infty$ normalverteilt (zentraler Grenzwertsatz)
- Damit gilt folgender Zusammenhang:

$$P\left[\left|\frac{\bar{\bar{X}} - E(\bar{X}_j)}{S^2/\sqrt{n}}\right| \geq \epsilon\right] = \alpha$$

$$\Rightarrow \left[\left|\frac{\bar{\bar{X}} - E(\bar{X}_j)}{S^2/\sqrt{n}}\right| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = \alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\left|\bar{\bar{X}} - E(\bar{X}_j))\right| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}} S^2/\sqrt{n}\right] = \alpha$$

Aufgabe 6.2a)

Approximation über die Normalverteilung:

- Der Wert $Z_n = \frac{\bar{\bar{X}} - E(\bar{X}_j)}{S^2/\sqrt{n}}$ ist für $n \to \infty$ normalverteilt (zentraler Grenzwertsatz)
- Damit gilt folgender Zusammenhang:

$$P\left[\left|\frac{\bar{\bar{X}} - E(\bar{X}_j)}{S^2/\sqrt{n}}\right| \geq \epsilon\right] = \alpha$$

$$\Rightarrow \left[\left|\frac{\bar{\bar{X}} - E(\bar{X}_j)}{S^2/\sqrt{n}}\right| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = \alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\left|\bar{\bar{X}} - E(\bar{X}_j))\right| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}} S^2/\sqrt{n}\right] = \alpha$$

- Damit lässt sich das Konfidenzintervall durch $\bar{\bar{X}} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} S^2/\sqrt{n}$ bestimmen

Aufgabe 6.2a)

- Ablesen von $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ aus Tabelle

Aufgabe 6.2a)

- Ablesen von $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ aus Tabelle
- 98%-Konfidenzintervall $\Rightarrow \alpha = 0,02 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99$

Aufgabe 6.2a)

- Ablesen von $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ aus Tabelle
- 98%-Konfidenzintervall $\Rightarrow \alpha = 0,02 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99$
- $z_{0,99} = 2,326 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} S^2/\sqrt{n} = 2,326 \cdot \frac{4{,}0181}{\sqrt{8}}$

$$\bar{\bar{X}} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} S^2/\sqrt{n} = [7,8112, 14,42]$$

Aufgabe 6.2 b

- Satz aus der VL: Wenn Y normalverteilt ist, dann ist $\frac{\widetilde{Y}-E(Y)}{\widetilde{S}/\sqrt{n}}$ t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgeraden

Aufgabe 6.2 b

- Satz aus der VL: Wenn Y normalverteilt ist, dann ist $\frac{\widetilde{Y} - E(Y)}{\widetilde{S}/\sqrt{n}}$ t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgeraden
- Damit lässt sich folgendes Konfidenzintervall berechnen

$$\hat{Y} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

Aufgabe 6.2 b

- Satz aus der VL: Wenn Y normalverteilt ist, dann ist $\frac{\widetilde{Y}-E(Y)}{\widetilde{S}/\sqrt{n}}$ t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgeraden
- Damit lässt sich folgendes Konfidenzintervall berechnen

$$\hat{Y} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

- Schau den t-Wert in einer Tabelle nach $\alpha = 0,02$, $n = 8$

$$t_{7,0,99} = 2,998$$

Aufgabe 6.2 b

- Satz aus der VL: Wenn Y normalverteilt ist, dann ist $\frac{\widetilde{Y}-E(Y)}{\widetilde{S}/\sqrt{n}}$ t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgeraden
- Damit lässt sich folgendes Konfidenzintervall berechnen

$$\hat{Y} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

- Schau den t-Wert in einer Tabelle nach $\alpha = 0,02$, $n = 8$

$$t_{7,0,99} = 2,998$$

- Einsetzen:

$$\left[11.1156 \pm 2.998 \frac{4.0181}{\sqrt{8}}\right] = [6.8567, 15.3745] \tag{5}$$

Aufgabe 6.2 b

- Satz aus der VL: Wenn Y normalverteilt ist, dann ist $\frac{\widetilde{Y}-E(Y)}{\widetilde{S}/\sqrt{n}}$ t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgeraden
- Damit lässt sich folgendes Konfidenzintervall berechnen

$$\hat{Y} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

- Schau den t-Wert in einer Tabelle nach $\alpha = 0,02,\ n = 8$

$$t_{7,0,99} = 2,998$$

- Einsetzen:

$$\left[11.1156 \pm 2.998 \frac{4.0181}{\sqrt{8}}\right] = [6.8567, 15.3745] \tag{5}$$

- Bei Anwendung der t-Verteilung Konfidenzintervall pessimistischer, daher beliebter