# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 a

- Welche Art von Produktionsprogramm sucht das Unternehmen? Soll die Zielfunktion minimiert oder maximiert werden?

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 a

- Welche Art von Produktionsprogramm sucht das Unternehmen? Soll die Zielfunktion minimiert oder maximiert werden?
- Es ist das Produktionsprogramm gesucht, das den Gewinn maximiert

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 a

- Welche Art von Produktionsprogramm sucht das Unternehmen? Soll die Zielfunktion minimiert oder maximiert werden?
- Es ist das Produktionsprogramm gesucht, das den Gewinn maximiert
- Die Zielfunktion wird also maximiert

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

- Bekannt aus der Aufgabe ist:

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

- Bekant aus der Aufgabe ist:
  - Der Erlös von $P_1$ beträgt 20 Euro und hat Kosten in Höhe von 17 Euro

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

- Bekannt aus der Aufgabe ist:
  - Der Erlös von $P_1$ beträgt 20 Euro und hat Kosten in Höhe von 17 Euro
  - Der Erlös von $P_2$ beträgt 30 Euro und hat Kosten in Höhe von 26 Euro
  - Maschine M kann in der Planungsperiode für 1200 Stunden eingesetzt werden

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

- Bekannt aus der Aufgabe ist:
  - Der Erlös von $P_1$ beträgt 20 Euro und hat Kosten in Höhe von 17 Euro
  - Der Erlös von $P_2$ beträgt 30 Euro und hat Kosten in Höhe von 26 Euro
  - Maschine M kann in der Planungsperiode für 1200 Stunden eingesetzt werden
  - Rohstoff R hat in der Planungsperiode 3000 Mengeneinheiten zur Verfügung stehen

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

- Bekannt aus der Aufgabe ist:
  - Der Erlös von $P_1$ beträgt 20 Euro und hat Kosten in Höhe von 17 Euro
  - Der Erlös von $P_2$ beträgt 30 Euro und hat Kosten in Höhe von 26 Euro
  - Maschine M kann in der Planungsperiode für 1200 Stunden eingesetzt werden
  - Rohstoff R hat in der Planungsperiode 3000 Mengeneinheiten zur Verfügung stehen
  - Maschinenstunden für $P_1$: 3 und für $P_2$: 2

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

- Bekannt aus der Aufgabe ist:
  - Der Erlös von $P_1$ beträgt 20 Euro und hat Kosten in Höhe von 17 Euro
  - Der Erlös von $P_2$ beträgt 30 Euro und hat Kosten in Höhe von 26 Euro
  - Maschine M kann in der Planungsperiode für 1200 Stunden eingesetzt werden
  - Rohstoff R hat in der Planungsperiode 3000 Mengeneinheiten zur Verfügung stehen
  - Maschinenstunden für $P_1$: 3 und für $P_2$: 2
  - Mengeneinheiten für $P_1$ : 5 und für $P_2$:10

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

- Bekannt aus der Aufgabe ist:
  - Der Erlös von $P_1$ beträgt 20 Euro und hat Kosten in Höhe von 17 Euro
  - Der Erlös von $P_2$ beträgt 30 Euro und hat Kosten in Höhe von 26 Euro
  - Maschine M kann in der Planungsperiode für 1200 Stunden eingesetzt werden
  - Rohstoff R hat in der Planungsperiode 3000 Mengeneinheiten zur Verfügung stehen
  - Maschinenstunden für $P_1$: 3 und für $P_2$: 2
  - Mengeneinheiten für $P_1$ : 5 und für $P_2$:10
  - $P_2$ kann am Markt mit höchstens 250 Mengeneinheiten abgesetzt werden

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

$$\max\ (20 - 17)x_1 + (30 - 26)x_2 = \max\ 3x_1 + 4x_2$$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

$$\max\ (20 - 17)x_1 + (30 - 26)x_2 = \max\ 3x_1 + 4x_2$$
$$\text{u.d.N. } 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \text{ (Maschine)}$$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

$$
\begin{aligned}
\max\ & (20 - 17)x_1 + (30 - 26)x_2 = \max\ 3x_1 + 4x_2 \\
\text{u.d.N.}\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \ \text{(Maschine)} \\
& 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \ \text{(Rohstoff)}
\end{aligned}
$$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

$$
\begin{aligned}
\max\ & (20 - 17)x_1 + (30 - 26)x_2 = \max\ 3x_1 + 4x_2 \\
\text{u.d.N. } & 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \text{ (Maschine)} \\
& 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \text{ (Rohstoff)} \\
& x_2 \leq 250 \text{ (max. Absatz P2)}
\end{aligned}
$$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

$$\begin{aligned} \max\ & (20-17)x_1 + (30-26)x_2 = \max\ 3x_1 + 4x_2 \\ \text{u.d.N. } & 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \text{ (Maschine)} \\ & 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \text{ (Rohstoff)} \\ & x_2 \leq 250 \text{ (max. Absatz P2)} \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 b

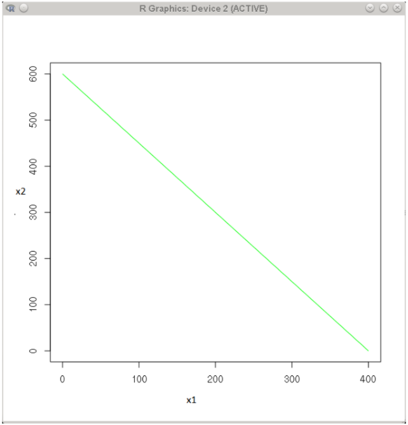
$$
\begin{aligned}
\max\ & (20 - 17)x_1 + (30 - 26)x_2 = \max\ 3x_1 + 4x_2 \\
\text{u.d.N.}\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \text{ (Maschine)} \\
& 5x_1 + 10x_2 \leq 3000 \text{ (Rohstoff)} \\
& x_2 \leq 250 \text{ (max. Absatz P2)} \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1c

$3x_1 + 2x_2 \leq 1200$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1c

$3x_1 + 2x_2 \leq 1200$

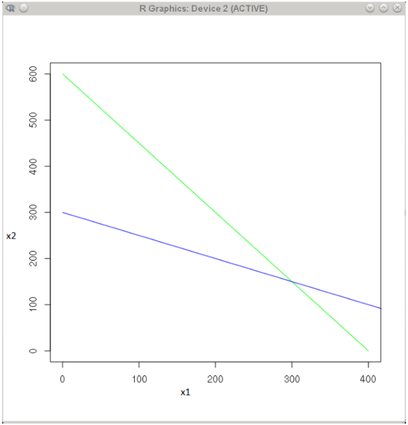


# Übungsblatt 9 Aufgabe 1c

$5x_1 + 10x_2 \leq 3000$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1c

$$5x_1 + 10x_2 \leq 3000$$

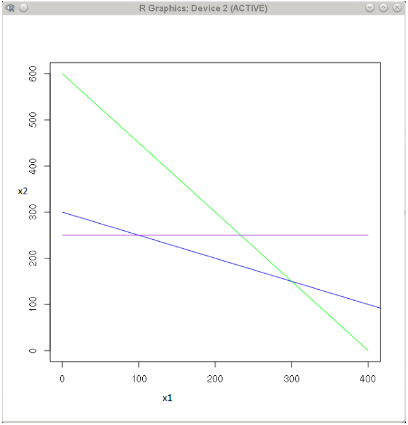


# Übungsblatt 9 Aufgabe 1c

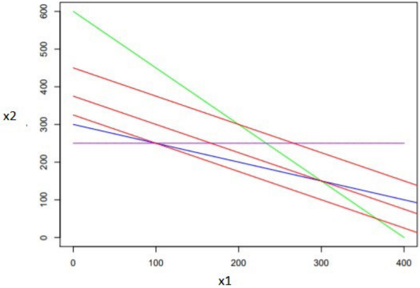
$x_2 \leq 250$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1c

$x_2 \leq 250$



Isogewinngerade



# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 c

- Isogewinngerade durch $(x_1, x_2) = (100, 250)$ geht mitten durch zulässigen Bereich.

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 c

- Isogewinngerade durch $(x_1, x_2) = (100, 250)$ geht mitten durch zulässigen Bereich.
  - Also kein Optimum

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 c

- Isogewinngerade durch $(x_1, x_2) = (100, 250)$ geht mitten durch zulässigen Bereich.
  - Also kein Optimum
- Isogewinngerade durch $(x_1, x_2) = (300, 150)$ berührt zulässigen Bereich nur in einem Punkt.

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 c

- Isogewinngerade durch $(x_1, x_2) = (100, 250)$ geht mitten durch zulässigen Bereich.
  - Also kein Optimum
- Isogewinngerade durch $(x_1, x_2) = (300, 150)$ berührt zulässigen Bereich nur in einem Punkt.
  - Also Optimum mit Zielfunktion

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 c

- Isogewinngerade durch $(x_1, x_2) = (100, 250)$ geht mitten durch zulässigen Bereich.
  - Also kein Optimum
- Isogewinngerade durch $(x_1, x_2) = (300, 150)$ berührt zulässigen Bereich nur in einem Punkt.
  - Also Optimum mit Zielfunktion
  - $3x_1 + 4x_2 = 900 + 600 = 1500$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 d

Normalform:

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 d

Normalform:

- min $c^T x$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 d

Normalform:

- min $c^T x$
- udN $Ax \leq b$
- $x \geq 0$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 d

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 d

$$c = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 d

$$c = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Übungsblatt 9 Aufgabe 1 d

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1200 \\ 3000 \\ 250 \end{bmatrix}$$

# Aufgabe 9.2 - Definition konvexe Menge

Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle Punkte $x, y \in K$ und für ein beliebiges $\lambda \in [0, 1]$ $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ gilt.

# Aufgabe 9.2 a)

Es gilt $x \in M_1, y \in M_1$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in M_1$.

# Aufgabe 9.2 a)

Es gilt $x \in M_1, y \in M_1$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in M_1$.

$$\lambda x + (1-\lambda)y \geq 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$

# Aufgabe 9.2 a)

Es gilt $x \in M_1, y \in M_1$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in M_1$.

$$\lambda x + (1-\lambda)y \geq 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$

$$\begin{aligned} A(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda Ax + (1-\lambda)Ay \\ &\leq \lambda b + (1-\lambda)b = b \end{aligned}$$

# Aufgabe 9.2b)

Es gilt $x, y \in M_2$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in M_2$.

# Aufgabe 9.2b)

Es gilt $x, y \in M_2$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in M_2$.
Sei $n = 1, x = 0, y = 1$ und $\lambda = 0.5$. Dann ist

$$(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0.5 \cdot 0 + (1 - 0.5) \cdot 1 = 0.5 \notin M_2$$

# Aufgabe 9.2.c)

Es gilt $y, z \in M_3$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda y + (1 - \lambda)z) \in M_3$.

# Aufgabe 9.2.c)

Es gilt $y, z \in M_3$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda y + (1-\lambda)z) \in M_3$.
Andere Schreibweise für $M_3$, die Rechnung vereinfacht (Norm):
$||x - d|| \leq c$, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

# Aufgabe 9.2.c)

Es gilt $y, z \in M_3$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda y + (1-\lambda)z) \in M_3$.
Andere Schreibweise für $M_3$, die Rechnung vereinfacht (Norm):
$||x - d|| \leq c$, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Mit den Eigenschaften der Norm können wir folgende Folgerungen ziehen:

$$\begin{aligned} & ||\lambda y + (1-\lambda)z - d|| \\ = & ||\lambda y + (1-\lambda)z - \lambda d + (1-\lambda)d|| \end{aligned}$$

# Aufgabe 9.2.c)

Es gilt $y, z \in M_3$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda y + (1-\lambda)z) \in M_3$.
Andere Schreibweise für $M_3$, die Rechnung vereinfacht (Norm):
$||x - d|| \leq c$, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Mit den Eigenschaften der Norm können wir folgende Folgerungen ziehen:

$$\begin{aligned} & ||\lambda y + (1-\lambda)z - d|| \\ = & ||\lambda y + (1-\lambda)z - \lambda d + (1-\lambda)d|| \end{aligned}$$

# Aufgabe 9.2.c)

Es gilt $y, z \in M_3$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda y + (1-\lambda)z) \in M_3$.
Andere Schreibweise für $M_3$, die Rechnung vereinfacht (Norm):
$||x - d|| \leq c$, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Mit den Eigenschaften der Norm können wir folgende Folgerungen ziehen:

$$\begin{aligned} & ||\lambda y + (1-\lambda)z - d|| \\ = & ||\lambda y + (1-\lambda)z - \lambda d + (1-\lambda)d|| \\ = & ||\lambda(y-d) + (1-\lambda)(z-d)|| \end{aligned}$$

# Aufgabe 9.2.c)

Es gilt $y, z \in M_3$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda y + (1-\lambda)z) \in M_3$.
Andere Schreibweise für $M_3$, die Rechnung vereinfacht (Norm):
$||x - d|| \leq c$, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Mit den Eigenschaften der Norm können wir folgende Folgerungen ziehen:

$$\begin{aligned} & ||\lambda y + (1-\lambda)z - d|| \\ = & ||\lambda y + (1-\lambda)z - \lambda d + (1-\lambda)d|| \\ = & ||\lambda(y-d) + (1-\lambda)(z-d)|| \\ \leq & \lambda||y-d|| + (1-\lambda)||z-d|| \qquad \text{Eigenschaften der Norm} \end{aligned}$$

# Aufgabe 9.2.c)

Es gilt $y, z \in M_3$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda y + (1-\lambda)z) \in M_3$.
Andere Schreibweise für $M_3$, die Rechnung vereinfacht (Norm):
$||x - d|| \leq c$, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Mit den Eigenschaften der Norm können wir folgende Folgerungen ziehen:

$$
\begin{aligned}
& ||\lambda y + (1-\lambda)z - d|| \\
= & ||\lambda y + (1-\lambda)z - \lambda d + (1-\lambda)d|| \\
= & ||\lambda(y-d) + (1-\lambda)(z-d)|| \\
\leq & \lambda||y-d|| + (1-\lambda)||z-d|| && \text{Eigenschaften der Norm} \\
\leq & \lambda c + (1-\lambda)c && \text{Definition } M_3
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 9.2.c)

Es gilt $y, z \in M_3$ beliebig. Zu zeigen $(\lambda y + (1-\lambda)z) \in M_3$.
Andere Schreibweise für $M_3$, die Rechnung vereinfacht (Norm):
$||x-d|| \leq c$, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
Mit den Eigenschaften der Norm können wir folgende Folgerungen ziehen:

$$
\begin{aligned}
& ||\lambda y + (1-\lambda)z - d|| \\
= & ||\lambda y + (1-\lambda)z - \lambda d + (1-\lambda)d|| \\
= & ||\lambda(y-d) + (1-\lambda)(z-d)|| \\
\leq & \lambda||y-d|| + (1-\lambda)||z-d|| && \text{Eigenschaften der Norm} \\
\leq & \lambda c + (1-\lambda)c && \text{Definition } M_3 \\
= & c
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 9.2d)

$z = \lambda x + (1 - \lambda) y$ für $\lambda \in [0, 1]$ und $x, y \in K_2$ beliebig

# Aufgabe 9.2d)

$z = \lambda x + (1-\lambda)y$ für $\lambda \in [0,1]$ und $x, y \in K_2$ beliebig
Es gilt $z \in K_1$, da $K_1$ konvex ist.

# Aufgabe 9.2d)

$z = \lambda x + (1 - \lambda) y$ für $\lambda \in [0, 1]$ und $x, y \in K_2$ beliebig
Es gilt $z \in K_1$, da $K_1$ konvex ist.
Außerdem gilt: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a^T x$

# Aufgabe 9.2d)

$z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ für $\lambda \in [0, 1]$ und $x, y \in K_2$ beliebig
Es gilt $z \in K_1$, da $K_1$ konvex ist.
Außerdem gilt: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a^T x$
Damit lässt sich folgern:

$$a^T(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

$z = \lambda x + (1-\lambda)y$ für $\lambda \in [0,1]$ und $x, y \in K_2$ beliebig
Es gilt $z \in K_1$, da $K_1$ konvex ist.
Außerdem gilt: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a^T x$
Damit lässt sich folgern:

$$\begin{aligned} & a^T(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ = & \lambda a^T x + (1-\lambda) a^T y \end{aligned}$$

# Aufgabe 9.2d)

$z = \lambda x + (1-\lambda)y$ für $\lambda \in [0,1]$ und $x, y \in K_2$ beliebig
Es gilt $z \in K_1$, da $K_1$ konvex ist.
Außerdem gilt: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a^T x$
Damit lässt sich folgern:

$$\begin{aligned}
&a^T(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
=&\lambda a^T x + (1-\lambda)a^T y \\
\leq&\lambda c + (1-\lambda)c
\end{aligned}$$

# Aufgabe 9.2d)

$z = \lambda x + (1-\lambda)y$ für $\lambda \in [0,1]$ und $x, y \in K_2$ beliebig
Es gilt $z \in K_1$, da $K_1$ konvex ist.
Außerdem gilt: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a^T x$
Damit lässt sich folgern:

$$
\begin{aligned}
& a^T(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
=& \lambda a^T x + (1-\lambda) a^T y \\
\leq& \lambda c + (1-\lambda) c \\
=& c
\end{aligned}
$$