

## Modellgestützte Analyse und Optimierung Übungsblatt 9

Ausgabe: 14.06.2021, Abgabe: 21.06.2021

### Aufgabe 9.1: Dualität

Formal stehen  $m$  Nahrungsmittel  $F_1, \dots, F_m$  zur Verfügung, die einen Bedarf an  $n$  Nährstoffen,  $N_1, \dots, N_n$  decken, die notwendig für eine gute Gesundheit sind. Sei  $c_j$  der minimale Bedarf an Nährstoff  $N_j$  pro Tag. Seien  $b_j$  die Kosten pro Mengeneinheit des Nahrungsmittels  $F_j$ . Sei  $a_{ij}$  die Menge an Nährstoffen  $N_j$ , die im Nahrungsmittel  $F_i$  enthalten sind. Die Frage ist nun, welcher Ernährungsplan die Lebensmittelkosten minimiert, sodass der Bedarf an täglich erforderlichen Nährstoffen gedeckt ist. Sei  $y_i$  die Menge an Nahrungsmitteln  $F_i$ , die pro Tag konsumiert werden. Die täglichen Kosten betragen dann

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m. \quad (1)$$

Die Menge an Nährstoffen  $N_j$  pro Tag beträgt

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m$$

für  $1 \leq j \leq n$ . Wir betrachten nur Ernährungspläne, die den täglichen Bedarf an erforderlichen Nährstoffen decken, so dass

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m \geq c_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad (2)$$

gilt. Es kann nur eine positive Anzahl von Lebensmitteln verspeist werden, so dass folgende Nebenbedingungen gegeben sind

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0. \quad (3)$$

Das Lebensmittelproblem ist: minimiere (1) unter den Nebenbedingungen (udN) (2) und (3).

- a) Formulieren Sie die duale Aufgabe des Lebensmittelproblems;
- b) Geben Sie die Interpretation des dualen Programms für das Lebensmittelproblem.

### Aufgabe 9.2:

Skizzieren Sie im  $\mathbb{R}^2$  jeweils ein Beispiel für ein lineares Programm mit

- a) einem eindeutigen Optimum bei unbeschränktem zulässigen Bereich;
- b) einem eindeutigen Optimum bei beschränktem zulässigen Bereich;
- c) mehreren Optima;
- d) keinem Optimum bei nicht leerem zulässigen Bereich.

**Aufgabe 9.3:**

Geben Sie notwendige und hinreichende Kriterien für  $s$  und  $t$  an, so dass das folgende lineare Programm

$$\max x_1 + x_2 \quad (4)$$

$$\text{u.d.N. } sx_1 + tx_2 \leq 1 \quad (5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (6)$$

- a) mindestens eine optimale Lösung hat,
- b) genau eine optimale Lösung hat,
- c) unbeschränkt ist.