Einschränkende Bedingungen für Defuzzifizierungsstrategien im Hinblick auf eine Theorie der Defuzzifizierung

Axel Thümmler
Dortmund

April 1997

Zusammenfassung

Dieser Bericht wurde im Rahmen eines Fuzzy-Logik Seminars an der Uni-Dortmund geschrieben. Er zeigt 13 Bedingungen für Defuzzifizierungsoperatoren auf, die sinnvollerweise von Entwicklern eines Fuzzy Controllers gefordert werden können. Eine derartige Entwicklung ist notwendig, da bisher bekannte Defuzzifizierungsstrategien wie etwa die Schwerpunktmethode nicht immer akzeptables Verhalten zeigen. Als Resultat werden die bekannten Defuzzifizierungsstrategien "Mean of Maxima (MOM)", "Center of Gravity (COG)" und "Center of Area (COA)" auf die Verträglichkeit mit den Bedingungen untersucht.

1 Einleitung

Heutzutage werden Fuzzy Controller in vielen Gebieten der Anwendung eingesetzt. So zum Beispiel in der Roboterforschung, Bild- und Sprachverarbeitung sowie in der Medizin. Der Controller bekommt dabei Eingabewerte von zu steuernden Geräten geliefert und produziert dann anhand der im Controller gespeicherten Regelbasis einen oder mehrere Ausgabewerte. Intern arbeitet der Fuzzy Controller mit unscharfen Werten. Es werden dazu die Eingabewerte erst fuzzifiziert, dann bearbeitet und zum Schluß, da die Ausgabe ein fester, scharfer Wert sein soll, wieder defuzzifiziert. Die meisten Anwendungen benutzen dazu die bekannten Defuzzifizierungsstrategien "Mean of Maxima" oder "Center of Gravity". Sie funktionieren in vielen Anwendungen auch korrekt, können aber nicht als allgemein gültige Strategien angesehen werden, da sie bei bestimmten Anwendungen nicht akzeptables Verhalten zeigen. Es ist also nötig, neue Defuzzifizierungsalgorithmen zu entwerfen.

In diesem Bericht soll es nun darum gehen, wünschenswerte Eigenschaften von Defuzzifizierungsalgorithmen aufzuzeigen. Dazu werden 13 Bedingungen vorgestellt, denen ein Defuzzifizierungsalgorithmus genügen sollte. Im Anschluß daran wird untersucht, inwiefern die klassischen Methoden den Bedingungen genügen.

2 Defuzzifizierung

Die Aufgabe der Defuzzifizierung besteht darin, aus einer gegebenen Fuzzy-Menge, die durch eine Zugehörigkeitsfunktion $\mu : U \to [0,1]$ beschrieben wird, einen scharfen Wert zu bestimmen. Das Universum U ist dabei in der Regel ein reelles Intervall.

$$U := [x_{inf}, x_{sup}] \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

Die Defuzzifizierung läßt sich dann mit einem Defuzzifizierungsoperator, der eine Zugehörigkeitsfunktion μ auf einen scharfen Wert abbildet, darstellen.

$$F^{-1} : \mathcal{P}(U) \to U \tag{2}$$

$\mathcal{P}(U) := \{\mu \mid \mu : U \to [0,1]\}$ ist dabei die Potenzmenge aller Fuzzy-Mengen über U. Im folgenden werden einige schon bekannte Defuzzifizierungsmethoden noch einmal zusammengefaßt.

2.1 Mean of Maxima (MOM)

Bei dieser Defuzzifizierungsmethode wird als scharfer Wert der Mittelwert aller Stellen mit maximalem Erfüllungsgrad von μ ausgegeben. Sei $M(\mu)$ die Menge der globalen Maxima von μ, also

$$M(\mu) := \{x \in U \mid \mu(y) \le \mu(x) \text{ für alle } y \in U\} \tag{3}$$

Dann ist im Fall, daß $M(\mu)$ endlich ist

$$F^{-1}_{MOM}(\mu) := \frac{\sum\limits_{x \in M(\mu)} x}{|M(\mu)|} \tag{4}$$

der Defuzzifizierungsoperator. Andernfalls gilt

$$F^{-1}_{MOM}(\mu) := \frac{\int\limits_{x \in M(\mu)} x \;\; dx}{\int\limits_{x \in M(\mu)} dx} \tag{5}$$

2.2 Center of Gravity (COG)

Die Defuzzifizierung nach der Schwerpunktmethode liefert als scharfen Wert die Abszisse des Schwerpunkts der Fläche unter dem Graphen der Fuzzy-Menge μ. Im Falle eines endlichen Universums $U := \{x_1, ..., x_m\}$ stellt sich der Defuzzifizierungsoperator wie folgt dar :

$$F^{-1}_{COG}(\mu) := \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu(x_i) \cdot x_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu(x_i)} \tag{6}$$

Im Falle eines unendlichen Universums gilt :

$$F^{-1}_{COG}(\mu) := \frac{\int\limits_{x_{inf}}^{x_{sup}} \mu(x) \cdot x \quad dx}{\int\limits_{x_{inf}}^{x_{sup}} \mu(x) \quad dx} \tag{7}$$

2.3 Center of Area (COA)

Dieses Verfahren teilt die Fläche unter der Fuzzy-Menge μ parallel zur $\mu(x)$-Achse in zwei gleich große Teile und gibt die x-Stelle der Achse als scharfen Wert aus. Die Methode liefert im wesentlichen das gleiche Ergebnis wie die COG-Methode. In einigen Spezialfällen zeigt sie jedoch ein besseres Verhalten [2]. Formal stellt sie sich wie folgt dar :

$$\int\limits_{x_{inf}}^{F^{-1}_{COA}(\mu)} \mu(x) \quad dx = \int\limits_{F^{-1}_{COA}(\mu)}^{x_{sup}} \mu(x) \quad dx \tag{8}$$

2.4 Center of Largest Area

Diese Methode wird gebraucht, wenn die Fuzzy-Menge μ sich als nicht konvexe Menge darstellt, sie also in der graphischen Darstellung zwischen zwei Bergen ein Tal hat. Es wird dann zuerst die Seite bestimmt, die den größeren Flächeninhalt hat und dann darauf die COA-Methode angewandt, um einen scharfen Wert zu bestimmen.

3 Bedingungen für Defuzzifizierungsoperatoren

Im folgenden werden 13 Bedingungen für Defuzzifizierungsstrategien, die im wesentlichen aus [1] übernommen wurden, dargestellt. Die Bedingungen lassen sich bezüglich ihrer Motivation in 4 Gruppen einteilen:

A. *Grundlegende Bedingungen:* Hier werden einige generelle Bedingungen, die ein Deffuzifizierungsoperator erfüllen sollte, aufgeführt.

B. *Graphisch motivierte Bedingungen:* Diese Bedingungen resultieren aus der graphischen Betrachtung der Zugehörigkeitsfunktion der zu defuzzifizierenden Fuzzy-Menge.

C. *Durch Fuzzy-Operationen motivierte Bedingungen:* In dieser Gruppe wird eine Verbindung zwischen Fuzzy-Operationen wie z.B. T-Normen und dem Defuzzifizierungsoperator hergestellt.

D. *Bedingungen in Bezug auf spezielle Anwendungen:* In verschiedenen Anwendungen werden manchmal sehr spezielle Defuzzifizierungseigenschaften benötigt. Obwohl sie meistens kontextabhängig sind, sollen doch einige hier aufgeführt werden.

Die Bedingungen der einzelnen Gruppen werden nun genauer untersucht.

A. Grundlegende Bedingungen

1. *Null-Element:* Eine Fuzzy-Menge, deren Zugehörigkeitsfunktion μ für alle $x \in U := [x_{inf}, x_{sup}]$ einen konstanten Wert α liefert, soll auf die Mitte des Intervalls defuzzifiziert werden (siehe Abbildung 1):

$$\forall\ x \in [x_{inf}, x_{sup}] : \mu(x) := \alpha \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu) := \frac{x_{inf} + x_{sup}}{2} \tag{9}$$

2. *Eins-Element:* Eine Singelton Fuzzy-Menge, also eine Fuzzy-Menge, deren Zugehörigkeitsfunktion μ nur an einer Stelle x_e den Wert 1 hat und sonst 0 ist, sollte zu x_e defuzzifiziert werden (siehe Abbildung 2):

$$\mu(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x = x_e \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu) := x_e \tag{10}$$

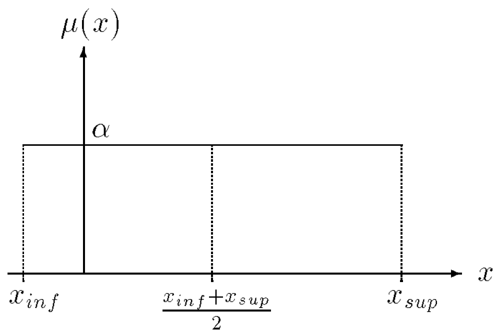

Abbildung 1: Null-Element

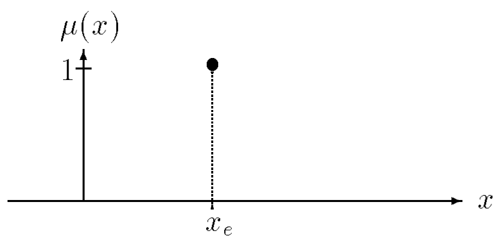

Abbildung 2: Eins-Element

3. *Monotonie:* Die Bedingung der Monotonie teilt sich in 4 Teilbedingungen auf. Sie beschreiben, wie sich der defuzzifizierte Wert $x^* := F^{-1}(\mu)$ bei Erhöhen oder Verringern der Zugehörigkeitsfunktion μ verändern sollte (siehe Abbildung 3):

(a) Wird rechts von x^* die Zugehörigkeitsfunktion μ ein Stück verringert, bewegt sich der neu defuzzifizierte Wert nicht nach rechts.

$$\mu'(x) := \mu(x)\ \forall\ x \leq x^* \quad \wedge \quad \mu'(x) \leq \mu(x)\ \forall\ x > x^* \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') \leq x^* \tag{11}$$

(b) Wird rechts von x^* die Zugehörigkeitsfunktion μ ein Stück erhöht, bewegt sich der neu defuzzifizierte Wert nicht nach links.

$$\mu'(x) := \mu(x)\ \forall\ x \leq x^* \quad \wedge \quad \mu'(x) \geq \mu(x)\ \forall\ x > x^* \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') \geq x^* \tag{12}$$

(c) Wird links von x^* die Zugehörigkeitsfunktion μ ein Stück verringert, bewegt sich der neu defuzzifizierte Wert nicht nach links.

$$\mu'(x) \leq \mu(x)\ \forall\ x < x^* \quad \wedge \quad \mu'(x) := \mu(x)\ \forall\ x \geq x^* \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') \geq x^* \tag{13}$$

(d) Wird links von x^* die Zugehörigkeitsfunktion μ ein Stück erhöht, bewegt sich der neu defuzzifizierte Wert nicht nach rechts.

$$\mu'(x) \geq \mu(x)\ \forall\ x < x^* \quad \wedge \quad \mu'(x) := \mu(x)\ \forall\ x \geq x^* \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') \leq x^* \tag{14}$$

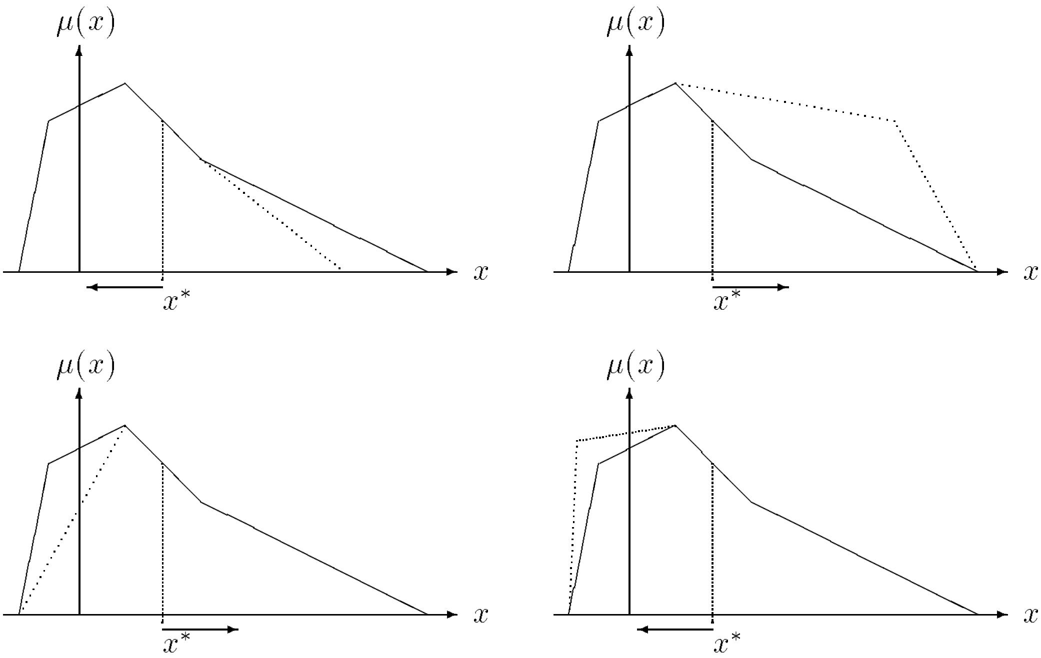

Abbildung 3: Verringere rechts, erhöhe rechts, verringere links, erhöhe links

B. Graphisch motivierte Bedingungen

4. *Symmetrie:* Wird die Zugehörigkeitsfunktion μ an der $\mu(x)$-Achse gespiegelt, so soll die relative Position des defuzzifizierten Wertes gleich bleiben (siehe Abbildung 4):

$$\mu'(x) := \mu(x_{inf} + x_{sup} - x) \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') = x_{inf} + x_{sup} - F^{-1}(\mu) \tag{15}$$

5. *x-Verschiebung:* Wird die Zugehörigkeitsfunktion μ nach rechts oder links entlang der x-Achse verschoben, so soll die relative Position des defuzzifizierten Wertes gleich bleiben (siehe Abbildung 5):

$$\mu'(x) := \mu(x + \Delta x) \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') = F^{-1}(\mu) - \Delta x \tag{16}$$

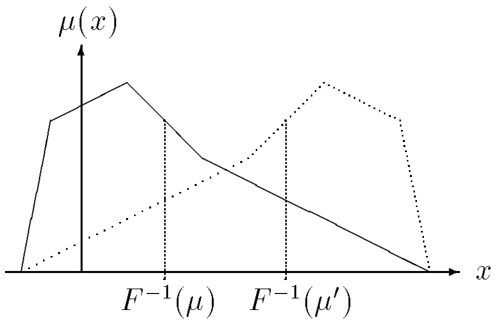

Abbildung 4: Symmetrie

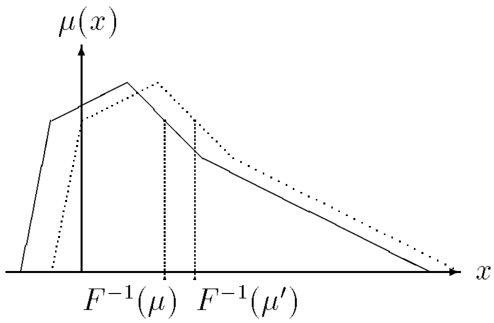

Abbildung 5: x-Verschiebung

6. *x-Skalierung:* Wird die Zugehörigkeitsfunktion entlang der x-Achse mit einem konstanten Faktor c skaliert, so soll sich die relative Position des defuzzifizierten Wertes nicht ändern (siehe Abbildung 6):

$$\mu'(x) := \mu(x_{inf} + c \cdot (x - x_{inf})) \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') = x_{inf} + c \cdot (F^{-1}(\mu) - x_{inf}) \tag{17}$$

7. *μ-Verschiebung:* Addiert man einen konstanten Offset α zu der Zugehörigkeitsfunktion μ, erhöht also den Zugehörigkeitswert für jedes Element des Universums, so können zwei verschiedene Bedingungen für den defuzzifizierten Wert gefordert werden:

   (a) *starke Version:* Der defuzzifizierte Wert der veränderten Zugehörigkeitsfunktion μ' soll der gleiche bleiben wie bei μ (siehe Abbildung 7):

   $$\mu'(x) := \mu(x) + \alpha \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') = F^{-1}(\mu) \tag{18}$$

   (b) *schwache Version:* In dieser schwachen Version wird eine Bewegung des defuzzifizierten Wertes nur in Richtung des Mittelpunktes x_m des Support-Intervalls von μ zugelassen:

   $$\mu'(x) := \mu(x) + \alpha \quad \wedge \quad F^{-1}(\mu) < x_m \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') \geq F^{-1}(\mu) \tag{19}$$

   $$\mu'(x) := \mu(x) + \alpha \quad \wedge \quad F^{-1}(\mu) = x_m \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') = F^{-1}(\mu) \tag{20}$$

   $$\mu'(x) := \mu(x) + \alpha \quad \wedge \quad F^{-1}(\mu) > x_m \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') \leq F^{-1}(\mu) \tag{21}$$

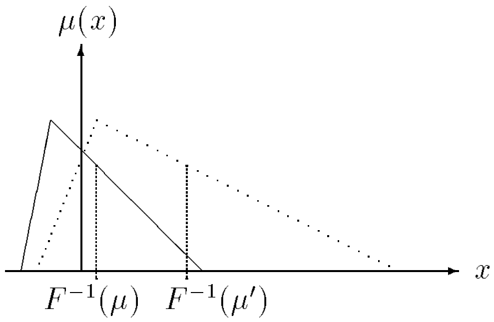

Abbildung 6: x-Skalierung

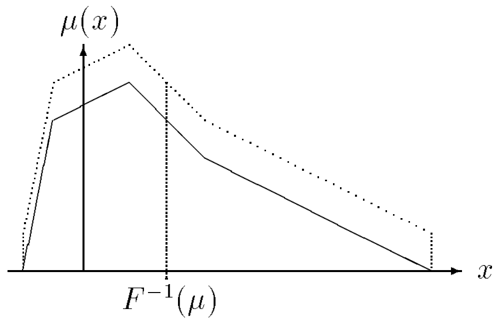

Abbildung 7: μ-Verschiebung, starke Version

8. *μ-Skalierung:* Wird die Zugehörigkeitsfunktion μ mit einem konstanten Faktor c multipliziert, also der Zugehörigkeitsgrad der Elemente des Universums zur Fuzzy-Menge multiplikativ erhöht, soll sich der defuzzifizierte Wert nicht ändern (siehe Abbildung 8):

$$\mu'(x) := c \cdot \mu(x) \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu') = F^{-1}(\mu) \tag{22}$$

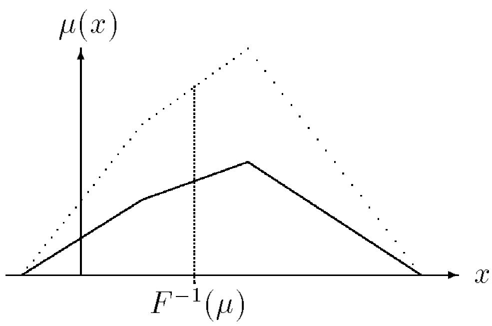

Abbildung 8: μ-Skalierung

C. Durch Fuzzy-Operatoren motivierte Bedingungen

Fuzzy-Systeme stellen unäre und binäre Operationen auf Fuzzy-Mengen zur Verfügung. Unäre Operationen sind z.B. Modifikatoren wie "very" oder "more or less (MOL)". Binäre Operationen sind "und"- und "oder"-Verknüpfungen zwischen Fuzzy-Mengen. Sie werden allgemein als T-Normen ("und") und S-Normen ("oder") bezeichnet. Die gebräuchlisten sind dabei der Minimum-Operator für "und" und der Maximum-Operator für "oder". In Anlehnung an diese Operationen werden die nächsten 3 Bedingungen definiert.

9. *T-Norm:* Es soll festgelegt werden, daß der defuzzifizierte Wert einer Fuzzy-Menge, die durch eine T-Norm-Operation entstanden ist, sich in dem Intervall befindet, das

durch die beiden defuzzifizierten Werte der Argumentmengen begrenzt ist (siehe Abbildung 9):

$$F^{-1}(\mu_1) \leq F^{-1}(\mu_2) \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu_1) \leq F^{-1}(\mu_1 \ \wedge_t \ \mu_2) \leq F^{-1}(\mu_2) \tag{23}$$

10. *S-Norm:* T-Normen und S-Normen sind dual zueinander. Es wird daher die entsprechende Eigenschaft gefordert (siehe Abbildung 10):

$$F^{-1}(\mu_1) \leq F^{-1}(\mu_2) \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(\mu_1) \leq F^{-1}(\mu_1 \ \vee_s \ \mu_2) \leq F^{-1}(\mu_2) \tag{24}$$

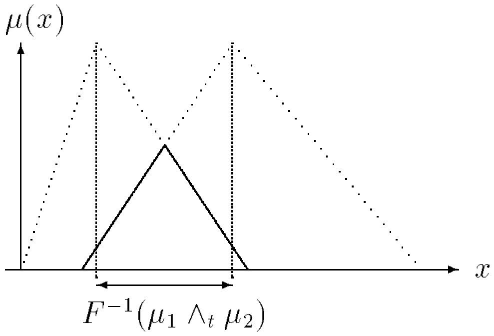

Abbildung 9: T-Norm

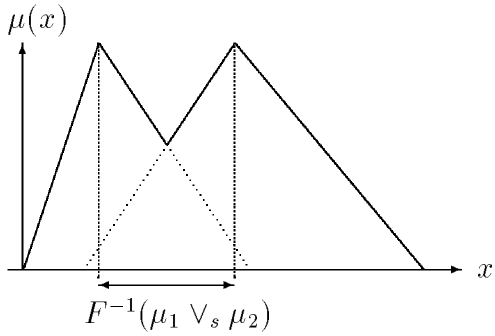

Abbildung 10: S-Norm

11. *Modifikatoren:*

    (a) *Concentration ("very"):* Wir betrachten für die Concentration den Operator $VERY$, der jeden Zugehörigkeitswert einer Zugehörigkeitsfunktion μ quadriert:

    $$VERY(\mu)(x) := (\mu(x))^2 \tag{25}$$

    Befindet sich der defuzzifizierte Wert der Zugehörigkeitsfunktion in einem monoton steigenden Teil von μ, so soll in der quadrierten Funktion der defuzzifizierte Wert größer werden. Befindet er sich dagegen in einem fallenden Teil von μ, sollte er sich nach links bewegen, also kleiner werden. Der defuzzifizierte Wert bewegt sich also in Richtung des höchsten Zugehörigkeitsgrades. Dazu sei $x^* := F^{-1}(\mu)$ und μ' die 1. Ableitung von μ. Dann soll gelten (siehe Abbildung 11):

    $$\mu'(x^*) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(VERY(\mu)) \leq F^{-1}(\mu) \tag{26}$$

    $$\mu'(x^*) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(VERY(\mu)) \geq F^{-1}(\mu) \tag{27}$$

(b) *Dilation ("more or less"):* Die Dilation stellt den inversen Operator zur Concentration dar. Hier wird die Dilation MOL betrachtet, die von jedem Zugehörigkeitswert die Wurzel zieht:

$$MOL(\mu)(x) := \sqrt{\mu(x)} \tag{28}$$

Das Verhalten des defuzzifizierten Wertes stellt sich hier analog dar (siehe Abbildung 12):

$$\mu'(x^*) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(MOL(\mu)) \geq F^{-1}(\mu) \tag{29}$$

$$\mu'(x^*) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(MOL(\mu)) \leq F^{-1}(\mu) \tag{30}$$

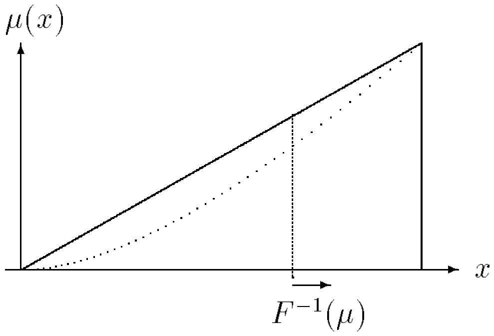

Abbildung 11: Concentration

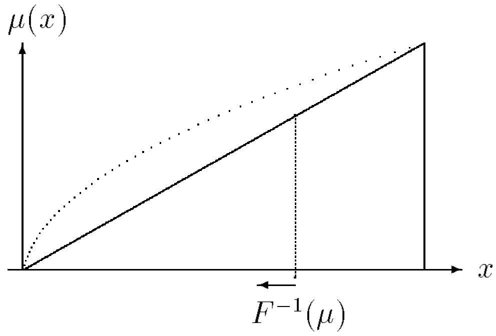

Abbildung 12: Dilation

D. Bedingungen in Bezug auf spezielle Anwendungen

12. *Fuzzy-Zahlen:* Konvexe, stückweise stetige Fuzzy-Mengen, die genau an einer Stelle x_m den Zugehörigkeitswert 1 annehmen, werden Fuzzy-Zahlen genannt [3]. Sie werden oft in einer L-R-Darstellung $(x_m, \alpha, \beta)_{LR}$ angegeben, wobei x_m die Maximumstelle ist und L und R spezielle Funktionen für den Teil links und rechts von x_m sind, die durch die Parameter α und β beschrieben werden [3, 4]. Aufgrund der großen Bedeutung von x_m soll der Defuzzifizierungsoperator auch diesen liefern (siehe Abbildung 13):

$$\mu(F^{-1}(\mu_{(x_m,\alpha,\beta)_{LR}}) := 1 \tag{31}$$

13. *Verbotene Zugehörigkeiten:* In manchen Anwendungen ist es nötig defuzzifizierte Werte zu verbieten, deren Zugehörigkeitsgrad eine Schwelle α unterschreitet. Ein Beispiel ist ein Fuzzy Controller, der einen Roboter steuert. Die Ergebnisfuzzymenge gibt dabei an, ob der Roboter sich nach rechts oder links bewegen soll. Sind beide Alternativen möglich, könnte eine Defuzzifizierungsstrategie den Mittelwert bilden

und würde den Roboter geradeaus fahren lassen. Dies könnte aber schlimme Folgen haben, wenn geradeaus z.B. eine Wand oder ein Loch wäre.

Um diese Fehler zu vermeiden, führen wir einen Schwellwert α ein, über dem der Zugehörigkeitswert des defuzzifizierten Wertes liegen muß. Es entstehen so zwei Zonen: eine mit zulässigen und eine mit unzulässigen Resultaten der Defuzzifizierung (siehe Abbildung 14):

$$\mu(F^{-1}(\mu)) \geq \alpha \tag{32}$$

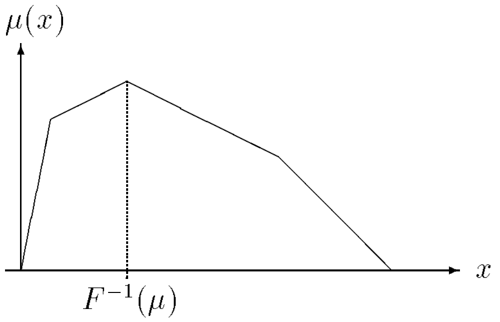

Abbildung 13: Fuzzy-Zahlen

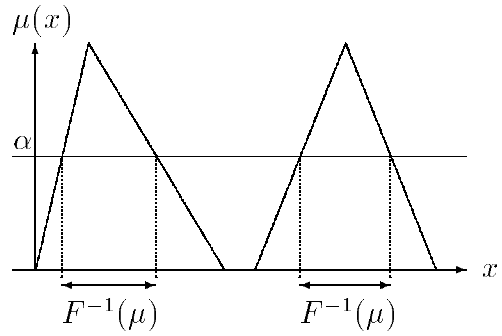

Abbildung 14: Verbotene Zugehörigkeiten

4 Resultat

In diesem Abschnitt sollen die am Anfang eingeführten Defuzzifizierungsstrategien "Mean of Maxima (MOM)", "Center of Gravity (COG)" und "Center of Area (COA)"auf ihre Verträglichkeit mit den 13 vorgestellten Bedingungen überprüft werden.

Betrachten wir zuerst MOM: Bedingung 1 wird definitionsmäßig eingehalten, Bedingung 2-8 sind offensichtlich auch erfüllt. Die T-Norm Eigenschaft, die in Bedingung 9 gefordert wird, ist nicht erfüllt, wie Abbildung 15 zeigt. Es liegt nämlich der defuzzifizierte Wert der Schnittmenge nicht im Intervall der beiden defuzzifizierten Werte der Ursprungsmengen. Die S-Norm Eigenschaft aus Bedingung 10 ist allerdings erfüllt, da bei MOM gerade der Mittelpunkt zwischen den Maxima genommen wird. Bedingung 11 und 12 sind auch erfüllt. Bedingung 13 nicht, da der defuzzifizierte Wert im "Tal" zwischen zwei "Bergen" liegen kann.

Bei den Defuzzifizierungsstrategien COG und COA sieht es etwas anders aus. Bedingungen 1-6 sind erfüllt. Bei Bedingung 7 gilt nur die schwache Version, bei der sich der defuzzifizierte Wert ins Support-Zentrum bewegt. Dies ist so, weil bei einer additiven Erhöhung des Zugehörigkeitsgrades die Flächen links und rechts vom defuzzifizierten Wert verschieden vergrößert werden. Bei der Skalierung ist es anders. Hier wird der Flächeninhalt relativ zum alten Flächeninhalt vergrößert. Bedingung 8 ist also erfüllt.

Die T-Norm Eigenschaft ist wie bei MOM nicht erfüllt. Es kann die gleiche Abbildung 15 zur Begründung herangezogen werden, wobei $F^{-1}(\mu)$ sich etwas weiter rechts befindet. Die S-Norm Eigenschaft ist hier allerdings im Gegensatz zu MOM auch nicht erfüllt, wie Abbildung 16 belegt. Die Zugehörigkeitsfunktionen μ und μ' sind hier so gewählt, daß $F^{-1}(\mu) = F^{-1}(\mu')$ gilt. Die Vereinigung der beiden Mengen ist links allerdings etwas größer als die Einzelmengen, wodurch der defuzzifizierte Wert nach links wandert. Laut Bedingung sollte er aber stehen bleiben. Bedingung 11 ist wiederum erfüllt, 12 und 13 offensichtlich nicht.

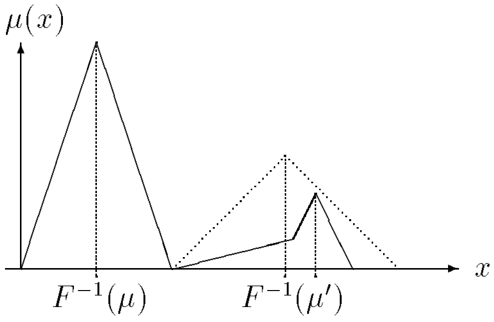

Abbildung 15: T-Norm Fehler

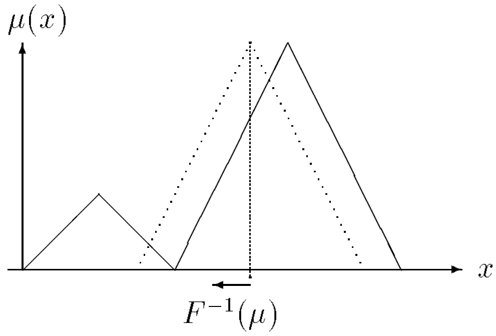

Abbildung 16: S-Norm Fehler

Literatur

[1] T. A. Runkler, M. Glesner. "A Set of Axioms for Defuzzification Strategies Towards a Theory of Rational Defuzzification Operators". Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems, März/April 1993, San Francisco, Seite 1161-1166.

[2] T. A. Runkler, M. Glesner. "Defuzzification with Improved Static and Dynamic Behavior: Extended Center of Area". EUFIT Sep. '93, Aachen, Seite 845-851.

[3] A. Mayer, B. Mechler, A. Schlindwein, R. Wolke. "Fuzzy Logic - Einführung und Leitfaden zur praktischen Anwendung". Addison-Wesley, 1993.

[4] R. Lazar. "Fuzzifizierung". PG 257 AURA, Uni-Dortmund, 5.12.94.